

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΛΜΟΚΩΔΙΚΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

7.1 Εισαγωγή

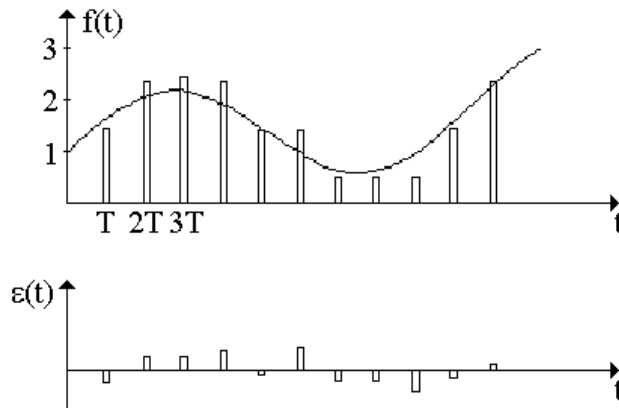
Η κατηγορία των συστημάτων διαμόρφωσης του κεφαλαίου αυτού χρησιμοποιείται για τη μετάδοση σημάτων, που είναι διακριτά όχι μόνο στο χρόνο αλλά και στις τιμές τους. Η ουσία των συστημάτων αυτών βασίζεται στην ικανότητα κωδικοποίησης διακριτών (πρακτικά πεπερασμένου αριθμού) τιμών, πράγμα που φυσικά δε μπορεί να γίνει όταν το σήμα είναι συνεχών τιμών. Πολλά σήματα είναι βέβαια αναλογικά, παίρνουν δηλαδή άπειρες τιμές σε κάποιο συνεχές πεδίο, έστω κι αν έχουν υποστεί δειγματοληψία στο χρόνο. Τέτοια σήματα πρέπει πρώτα να υποστούν κβάντιση, πράξη που περιορίζει τις τιμές τους σε κάποιο πεπερασμένο αριθμό. Η κβάντιση, λοιπόν, είναι η βασική ιδέα για τα συστήματα αυτά.

7.2 Κβάντιση

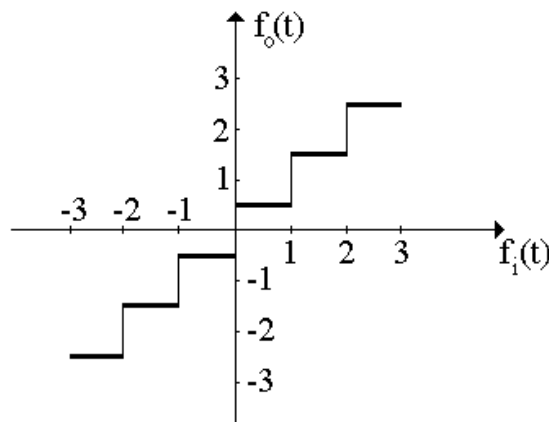
Όταν γίνεται η δειγματοληψία, λαμβάνονται οι τιμές του πληροφοριακού σήματος $f(t)$ σε ορισμένα σημεία του χρόνου t . Θεωρητικά, μπορεί κάποιος να επιμένει ότι οι τιμές του $f(t)$ πρέπει να είναι ακριβείς. Αλλά στην πράξη αυτό είναι ανούσιο, γιατί τα συστήματα έχουν θόρυβο, που αλλάζει τις τιμές και στο δέκτη κανένα όργανο δεν υπάρχει, που να μπορεί να τις μετρήσει χωρίς κάποια παραμόρφωση ή χωρίς λάθος. Μ' αυτή τη λογική μπορούν να περιοριστούν οι τιμές του $f(t)$ σ' ένα πεπερασμένο αριθμό. Αυτή η πράξη ονομάζεται **κβάντιση**.

Στο Σχήμα 7.1 δίνεται ένα αναλογικό σήμα $f(t)$, που υφίσταται δειγματοληψία διαπλατυσμένης κορυφής τις χρονικές στιγμές $T, 2T, 3T, \dots$ και οι τιμές του είναι περιορισμένες στις $0.5, 1.5, 2.5, \dots$. Δηλαδή, όταν η τιμή του $f(t)$ βρίσκεται στο διάστημα $[0,1]$, τότε η τιμή του θεωρείται ότι είναι 0.5 , όταν πέφτει στο διάστημα $[1,2]$ θεωρείται 1.5 κ.ο.κ. Οι τιμές $0.5, 1.5, 2.5, \dots$ ονομάζονται **τιμές ή στάθμες κβάντισης** και η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών ονομάζεται **βήμα κβάντισης**. Στην περίπτωση του παραδείγματος του Σχήματος 7.1, το βήμα είναι "μονάδα" και είναι σταθερό, για αυτό η κβάντιση αυτή ονομάζεται **ομοιόμορφη**. Επίσης, έχουν σχεδιαστεί και οι

διαφορές μεταξύ των πραγματικών τιμών του $f(t)$ στα σημεία δειγματοληψίας και των τιμών που προσδιορίζει η κβάντιση. Οι διαφορές αυτές αποτελούν το **λάθος** ή το **σφάλμα κβάντισης** και ονομάζεται **θόρυβος κβάντισης**. Φυσικά το λάθος αυτό **δεν διορθώνεται ποτέ**, δηλαδή η κβάντιση δεν είναι πράξη **αντίστροφη**. Οι ηλεκτρονικές συσκευές, που εκτελούν την πράξη της κβάντισης ονομάζονται **κβαντιστές**, και η χαρακτηριστική εισόδου-εξόδου μιας τέτοιας συσκευής δίνεται στο Σχήμα 7.2.



Σχήμα 7.1. (α) Διαδικασία της κβάντισης και (β) το σφάλμα της κβάντισης.



Σχήμα 7.2. Χαρακτηριστική εισόδου-εξόδου ενός κβαντιστή.

Το πρώτο πλεονέκτημα της κβάντισης παρουσιάζεται στη μετάδοση των τιμών της $f(t)$, όταν υπάρχει προσθετικός θόρυβος στο κανάλι ή στις συσκευές επεξεργασίας. Αν ο θόρυβος είναι μικρός (μικρότερος από μισό βήμα κβάντισης), τότε μια νέα κβάντιση θα τον εξαλείψει εντελώς. Στην πράξη, ο θόρυβος στο κανάλι μεγαλώνει ανάλογα με την απόσταση. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μπορεί κανείς να βάλει κβαντιστές

σε κατάλληλα διαστήματα στο κανάλι με αποτέλεσμα να εξαλειφθεί εντελώς η επίδραση του θορύβου. Το δεύτερο πλεονέκτημα της κβάντισης είναι η δυνατότητα που παρέχει για κωδικοποίηση των κβαντισμένων τιμών του $f(t)$, οι οποίες δεν μπορούν να κωδικοποιηθούν, όταν οι τιμές του σήματος $f(t)$ είναι άπειρες. Στην πράξη, ο αριθμός των τιμών (και φυσικά το βήμα) παίζει ρόλο στην παραμόρφωση του σήματος και προσδιορίζεται πειραματικά. Στην έγχρωμη τηλεόραση 512 τιμές δίνουν εξαιρετικά αποτελέσματα, ενώ 64 μόνο τιμές δίνουν μια απλά υποφερτή εικόνα.

7.3 Κωδικοποίηση

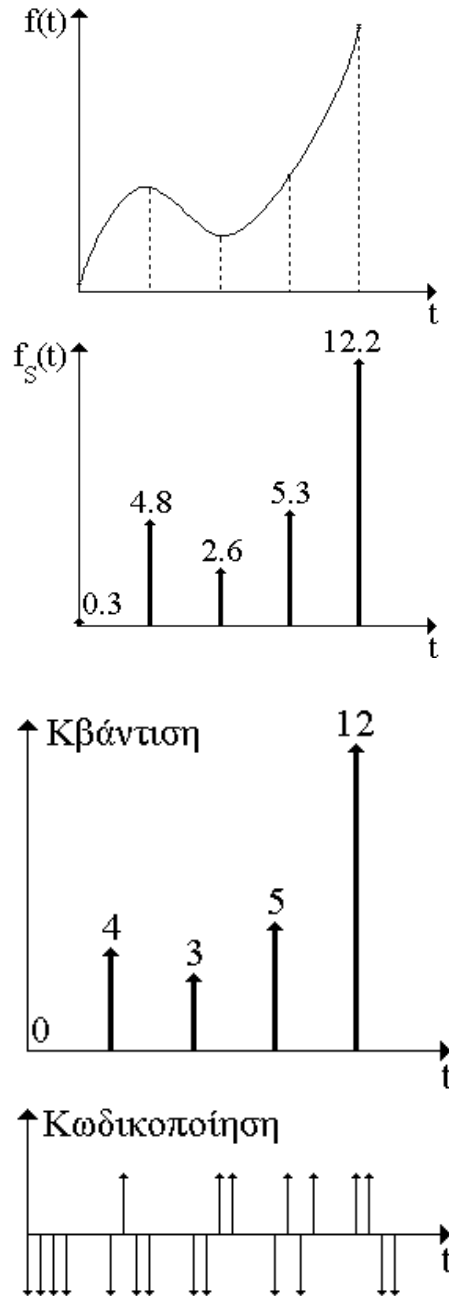
Η διαδικασία αυτή των τιμών ενός σήματος $f(t)$ αποτελεί ειδικό κεφάλαιο της θεωρίας Πληροφορίας, τη Θεωρία Κωδίκων. Όμως, στα πλαίσια του παρόντος μαθήματος θα γίνει μια εισαγωγή στο τεράστιο αυτό θέμα, ώστε να γίνει αντιληπτό το πλεονέκτημα της κωδικοποίησης.

Έστω, λοιπόν, ότι οι τιμές δειγματοληψίας ενός σήματος $f(t)$ περνάνε από έναν κβαντιστή και ότι το αποτέλεσμα είναι μόνο 16 πιθανές τιμές, οι οποίες μπορούν να κωδικοποιηθούν με το λεγόμενο αριθμητικό κώδικα βάσης **δύο** (δυναδικός κώδικας). Αυτός ο κώδικας βασίζεται στο γεγονός ότι οι αριθμοί N (0, 1, 2, ..., 15) μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$N = k_3 2^3 + k_2 2^2 + k_1 2^1 + k_0 2^0 \quad (7.1)$$

όπου οι συντελεστές k_i ($i=0, 1, 2, 3$) μπορούν να είναι είτε 0 ή 1. Δηλαδή, οι προς μετάδοση τιμές του $f(t)$ (0, 4, 3, 5, 12) κωδικοποιούνται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.3. Οι συναρτήσεις δέλτα παριστάνουν παλμούς μικρής διάρκειας και που έχουν δύο δυνατές τιμές το "ένα" και το "μηδέν". Για παλμούς *RZ* (*Return-to-zero*) το "μηδέν" αντιστοιχεί σε τάση 0 V, ενώ για *NRZ* (*Non-return-to-zero*) το "μηδέν" αντιστοιχεί σε τάση -A V. Στον δέκτη, χωρίς την κωδικοποίηση, πρέπει να υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης $f(t)$. Κάθε τιμή του $f(t)$ έχει και προσθετικό θόρυβο, αν όχι από το κανάλι, από την κεραία και τις άλλες συσκευές επεξεργασίας. Χωρίς κβάντιση και χωρίς κωδικοποίηση, ο δέκτης πρέπει να αποφασίσει ποια από τις άπειρες δυνατές τιμές έχει αφιχθεί, ενώ με την κβάντιση και την κωδικοποίηση ο δέκτης έχει πολύ πιο περιορισμένο σκοπό. Πρέπει, απλώς, να αποφασίσει σε κάθε περιορισμένο τμήμα του

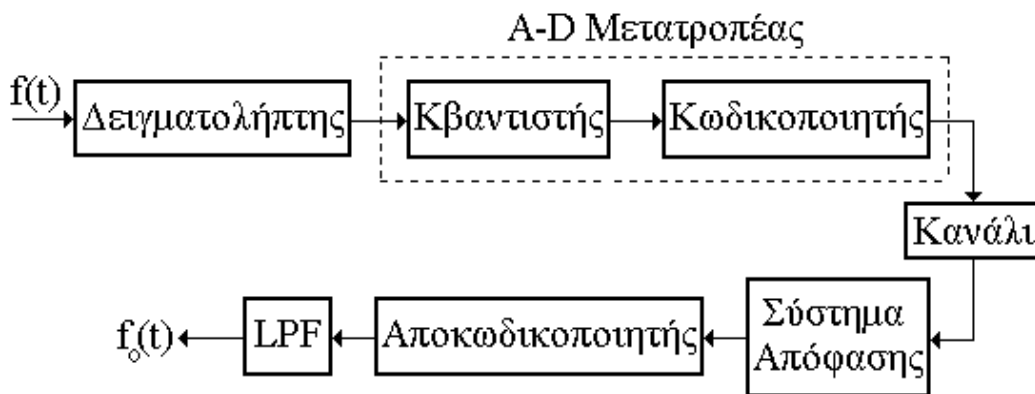
χρόνου, αν υπάρχει "μηδέν" ή "ένα". Φυσικά, αυτό που κερδίζεται δε γίνεται ανώδυνα. Κάθε τιμή του $f(t)$ παίρνει τώρα τέσσερα (ή περισσότερα) τμήματα του χρόνου και περιορίζει τον αριθμό σημάτων, που μπορούν να σταλούν σε σύστημα πολυπλεξίας με διαίρεση χρόνου. Επιπρόσθετα, οι συσκευές κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης είναι πιο πολύπλοκες και πιο ακριβές.



Σχήμα 7.3. Διαδικασία κβάντισης και κωδικοποίησης.

7.4 Το Σύστημα PCM

Στο σύστημα αυτό, το σήμα πληροφορίας πρώτα **δειγματοληπτείται**, ύστερα υφίσταται **κβάντιση** και τέλος **κωδικοποιείται**. Ο κβαντιστής και ο κωδικοποιητής αποτελούν τον Αναλογικό-Ψηφιακό Μετατροπέα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4. Στην περίπτωση, που το σύστημα δεν έχει τον κωδικοποιητή, τότε είναι σύστημα Διαμόρφωσης Πλάτους Παλμών με κβάντιση. Ο κωδικοποιητής είναι το κουτί που του δίνει το όνομα της παλμοκωδικής διαμόρφωσης. Το σήμα του κώδικα είναι συνήθως παλμοί χαμηλής αρμονικότητας και, επομένως, το κανάλι πρέπει να έχει παρόμοιο εύρος ζώνης. Σε περίπτωση, που το κανάλι είναι ασύρματο, τότε το σήμα του κώδικα πρέπει να μεταδοθεί μ' ένα από τα γνωστά συστήματα *AM* ή *FM* (*ASK*, *FSK*, *PSK*). Στο δέκτη, αρχικά το σήμα περνά από το Σύστημα Απόφασης, όπου αποφασίζεται αν είναι "μηδέν" ή "ένα". Στη συνέχεια, περνά από τον αποκωδικοποιητή και, τελικά, το σήμα μετατρέπεται σε αναλογικό μέσα από ένα χαμηλοπερατό φίλτρο.



Σχήμα 7.4. Block διάγραμμα ενός πομπού και ενός δέκτη PCM.

7.5 Χαρακτηριστικά Σημεία της Διαμόρφωσης PCM

α. Οποιοδήποτε κβαντισμένο δείγμα μπορεί να κωδικοποιηθεί σε n παλμούς, καθένας από τους οποίους έχει m δυνατές τιμές πλάτους, οπότε ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών είναι $M = m^n$. Στην πράξη συνήθως $m = 2$, οπότε πρόκειται για **δυναδική κωδικοποίηση** (*Binary PCM*).

β. Όταν το σήμα εκπέμπεται ως *PAM* ($n = 1$), τότε η ροή πληροφορίας (χωρητικότητα) είναι το πηλίκο της μέσης πληροφορίας (εντροπίας) των δυνατών συνδυασμών που μεταδίδονται προς το χρόνο που απαιτείται για τη μετάδοση, δηλαδή

$$C = \frac{\log_2 M}{T_s} = f_s \log_2 m = 2B \log_2 m \text{ (bps)} \quad (7.2)$$

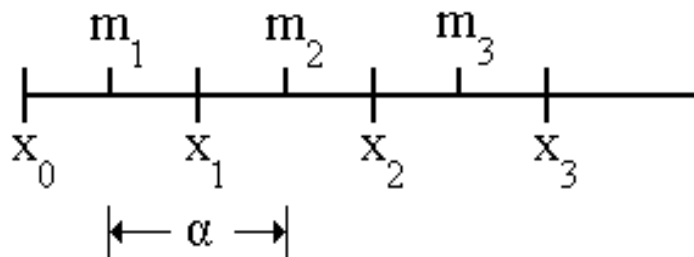
γ. Όταν το σήμα εκπέμπεται ως *PCM* n παλμών, τότε η ροή πληροφορίας θα είναι:

$$C = 2nB \log_2 m \text{ (bps)} \quad (7.3)$$

Συνεπώς, για την ίδια ροή πληροφορίας απαιτείται στην διαμόρφωση *PCM* n φορές περισσότερο εύρος ζώνης από εκείνο, που χρειάζεται στην διαμόρφωση *PAM*.

δ. **Θόρυβος ή σφάλμα κβάντισης**

Έστω ότι η από κορυφή σε κορυφή τάση ενός σήματος $x(t)$ διαιρείται σε M ισαπέχοντα διαστήματα, καθένα από τα οποία έχει πλάτος a . Στο κέντρο κάθε διαστήματος τοποθετείται μια στάθμη κβάντισης m_1, m_2, \dots, m_M όπως φαίνεται και στο Σχήμα 7.5.



Σχήμα 7.5. Επίπεδα κβάντισης και στάθμες κβάντισης.

Έτσι, η έξοδος του κβαντιστή είναι m_i όταν το δείγμα της τάσης $x(t)$ βρίσκεται στο διάστημα $(x_{i-1}, x_i]$ με $i = 1, 2, \dots, M-1$. Τότε το σφάλμα κβάντισης για το συγκεκριμένο δείγμα είναι $e(t) = x(t) - m_i$. Αν $f(x)dx$ είναι η πιθανότητα της $x(t)$ να βρίσκεται στο διάστημα $x - (dx/2)$ και $x + (dx/2)$, τότε η μέση τετραγωνική τιμή του σφάλματος κβάντισης είναι:

$$\overline{e^2} = \sum_{i=1}^M \int_{m_i - a/2}^{m_i + a/2} (x - m_i)^2 f(x) dx \quad (7.4)$$

Βέβαια, η συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ του σήματος $x(t)$ δεν είναι σταθερή. Όμως, στο διάστημα ολοκλήρωσης από $m_i - (a/2)$ έως $m_i + (a/2)$ μπορεί να υποθεθεί ότι η τιμή της $f(x)$ παραμένει σταθερή και ίση με $f^{(i)}$, ειδικά στην περίπτωση, που το M είναι μεγάλο και συνεπώς το βήμα κβάντισης a αρκετά μικρότερο του V_{pp} . Τότε, η τελευταία σχέση γράφεται:

$$\overline{e^2} = \sum_{i=1}^M f^{(i)} \int_{-a/2}^{a/2} \xi^2 d\xi = \sum_{i=1}^M f^{(i)} \frac{2}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \sum_{i=1}^M f^{(i)} \frac{a^3}{12} \quad (7.5)$$

όπου $\xi \equiv x - m_i$. Όμως, επειδή το $\sum_{i=1}^M f^{(i)} a = 1$, αφού $f^{(i)} a$ είναι η πιθανότητα του $x(t)$ να βρίσκεται στην i -οστή διαμέριση κβάντισης. Συνεπώς, η μέση τετραγωνική τιμή του σφάλματος κβάντισης είναι:

$$\overline{e^2} = N_q = \frac{a^2}{12} \quad (7.6)$$

ε. Λόγος σήματος-προς-θόρυβο κβάντισης

Η μέση τετραγωνική τιμή του σήματος $\overline{x_q^2(t)}$ στην έξοδο του κβαντιστή δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{x_q^2(t)} = \sum_{i=1}^M m_i^2 \int_{m_i - a/2}^{m_i + a/2} f(x) dx \quad (7.7)$$

Για λόγους απλοποίησης, υποτίθεται ότι στο διάστημα $(-V_{pp}/2, +V_{pp}/2)$ το σήμα $x(t)$ χαρακτηρίζεται από μια ομοιόμορφη πυκνότητα πιθανότητας, οπότε, $f(x) = 1/V_{pp}$ και η τελευταία σχέση γράφεται:

$$\overline{x_q^2(t)} = \frac{1}{V_{pp}} a \sum_{i=1}^M m_i^2 \quad (7.8)$$

Όμως, $m_i = -\frac{V_{pp}}{2} + ia - \frac{a}{2} = -\frac{Ma}{2} + ia - \frac{a}{2}$, οπότε

$$m_i^2 = \frac{(M+1)^2 a^2}{4} + i^2 a^2 - (M+1)ia^2 \quad (7.9)$$

Από τη θεωρία των σειρών είναι γνωστό ότι:

$$\sum_{i=1}^M i = \frac{M(M+1)}{2} \text{ καθώς και } \sum_{i=1}^M i^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} \quad (7.10)$$

Τότε η μέση τετραγωνική τιμή του σήματος στην έξοδο του κβαντιστή είναι:

$$\overline{x_q^2(t)} = \frac{1}{M} \left[\frac{M(M+1)^2 a^2}{4} + \frac{M(M+1)(2M+1)a^2}{6} - \frac{M(M+1)^2 a^2}{2} \right] = \frac{a^2}{12}(M^2 - 1) \quad (7.11)$$

οπότε ο λόγος σήματος-προς-θόρυβο στην έξοδο του κβαντιστή δίνεται από τη σχέση:

$$SNR_q = M^2 - 1 = 2^{2n} - 1 \quad (7.12)$$

όπου n ο αριθμός των bits που χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση του σήματος. Ο τελευταίος λόγος γράφεται σε decibel:

$$SNR_q = 10 \log_{10}(2^{2n} - 1) (\cong 6n \text{ όταν } n \geq 5) \quad (7.13)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω σύστημα PCM των 9-bit με ομοιόμορφο συμμετρικό κβαντιστή μέγιστης στάθμης 2.5σ , όπου σ είναι η τυπική απόκλιση του προς μετατροπή σε ψηφιακό σήματος πληροφορίας $x(t)$. Η πυκνότητα του φάσματος ισχύος του $x(t)$ είναι:

$$S_X(f) = \begin{cases} \frac{A_0^2}{W} \cos^2\left(\frac{\pi f}{W}\right) & , |f| < W \\ 0 & , |f| > W \end{cases}$$

με $A_0 = 5$ V και $W = 5$ kHz, $E[x(t)] = 0$. Για την κωδικοποίηση χρησιμοποιείται απλός δυαδικός κώδικας, όπου η στάθμη -2.5σ κωδικοποιείται ως 000000000.

- Να βρεθεί η μέση τετραγωνική τιμή του θορύβου κβάντισης και ο λόγος σήματος-προς-θόρυβο κβάντισης σε dB.
- Να βρεθεί πως κωδικοποιούνται τα παρακάτω δείγματα $x(t)$: 0.606, 2.6, -4.06 και 8.69 V.

Απάντηση

$n = 9 \Rightarrow M = 2^n = 512$ στάθμες κβάντισης

βήμα κβάντισης: $a = \frac{2V_{\max}}{M-1} = \frac{2m\sigma}{M-1}$, όπου $V_{\max} = \frac{V_{pp}}{2} - \frac{a}{2}$

α. $\sigma^2 = \overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = \frac{A_0^2}{W} \int_{-W}^W \cos^2\left(\frac{\pi f}{W}\right) df = \frac{A_0^2}{W} \frac{W}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y dy = A_0^2$,

επομένως $\sigma = A_0 = 5 \text{ V} \Rightarrow V_{\max} = 12.5 \text{ V} \Rightarrow a = 0.0489 \text{ V} \Rightarrow V_{pp} = 25.0489 \text{ V}$. Άρα:

$$N_q = \frac{a^2}{12} = 1.99 \times 10^{-4} \text{ V}^2$$

Για τον υπολογισμό του SNR_q θα χρησιμοποιηθεί η σχέση, που υπάρχει στην Παράγραφο 7.5ε, δηλ. $SNR_q \cong 6n = 54 \text{ dB}$, ενώ ο μη προσεγγιστικός τύπος δίνει: 54.18 dB.

β. Για την κωδικοποίηση των δειγμάτων, που δίνονται, είναι φανερό ότι όλα τα δείγματα $x(kT)$ ικανοποιούν τη σχέση: $|x(kT)| \leq V_{\max} = 12.5 \text{ V}$. Από το Σχήμα 7.5

προκύπτει ότι: $x_0 = -\frac{V_{pp}}{2}$, $x_i = -\frac{V_{pp}}{2} + ia$ και $m_i = -\frac{V_{pp}}{2} + ia - \frac{a}{2}$, $i = 1, 2, \dots$

Το πρώτο δείγμα είναι $x(t_1) = 0.606 \text{ V}$, οπότε το πηλίκο $\frac{x(t_1) - (-V_{pp}/2)}{a} = 268.52$

δηλώνει ότι το δείγμα αυτό βρίσκεται στο 269ο επίπεδο κβάντισης, στο οποίο υπάρχει η 269 στάθμη κβάντισης με αντίστοιχο κωδικό αριθμό 268, αφού το η πρώτη στάθμη έχει κωδικό 0 ($0 < x(t) < a$). Ο αριθμός 268 στο δυαδικό σύστημα γράφεται 100001100 αφού $268 = 256 + 12 = 2^8 + 2^3 + 2^2$.

Αντίστοιχα, για τα υπόλοιπα δείγματα:

$$\frac{2.6 + 12.52445}{0.0489} = 309.29 \rightarrow 310 \text{ διάστημα} \rightarrow 310 \text{ στάθμη κβάντισης} \rightarrow 309 \text{ κωδικός}$$

$$\text{στάθμης} \rightarrow 309 = 256 + 32 + 16 + 4 + 1 = 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 \rightarrow 100110101$$

$$\frac{-4.06 + 12.52445}{0.0489} = 173.09 \rightarrow 174 \text{ διάστημα} \rightarrow 174 \text{ στάθμη κβάντισης} \rightarrow 173 \text{ κωδικός}$$

$$\text{στάθμης} \rightarrow 173 = 128 + 32 + 13 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 \rightarrow 010101101$$

$$\frac{8.69 + 12.52445}{0.0489} = 433.83 \rightarrow 434 \text{ διάστημα} \rightarrow 434 \text{ στάθμη κβάντισης} \rightarrow 433 \text{ κωδικός}$$

$$\text{στάθμης} \rightarrow 433 = 256 + 128 + 32 + 16 + 1 = 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^0 \rightarrow 110110001$$

2. Θεωρείστε ένα σήμα με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \begin{cases} ke^{-|x|}, & |x| < 4 \\ 0, & |x| > 4 \end{cases}$.

Υπολογίστε τη σταθερά k . Αν το σήμα υφίσταται ομοιόμορφη συμμετρική κβάντιση και m_i ($i = 1, 2, 3, 4$) είναι οι τέσσερις δυνατές στάθμες κβάντισης, να υπολογιστούν το βήμα κβάντισης a καθώς και η μέση τετραγωνική τιμή του σφάλματος κβάντισης.

Απάντηση

Από τη γνωστή σχέση $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, υπολογίζεται εύκολα η σταθερά k . Πράγματι:

$$k \int_{-4}^0 e^x dx + k \int_0^4 e^{-x} dx = 1 \Rightarrow k(e^0 - e^{-4}) - k(e^{-4} - e^0) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2(1 - e^{-4})}$$

Επειδή $V_{pp} = 8 \Rightarrow a = \frac{V_{pp}}{M} = \frac{8}{4} = 2$ V, οπότε: $N_q = \sum_{i=1}^4 \int_{m_i - a/2}^{m_i + a/2} (x - m_i)^2 f(x) dx$

$$= \int_{-4}^{-2} (x+3)^2 e^x dx + \int_{-2}^0 (x+1)^2 e^x dx + \int_0^2 (x-1)^2 e^{-x} dx + \int_2^4 (x-3)^2 e^{-x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι γνωστό ότι: } \int (x+a)^2 e^{tx} dx &= \frac{1}{t} \int (x+a)^2 de^{tx} = \frac{1}{t} (x+a)^2 e^{tx} - \frac{1}{t} 2 \int (x+a) e^{tx} dx \\ &= \frac{1}{t} (x+a)^2 e^{tx} - \frac{2}{t^2} \int (x+a) de^{tx} = \frac{1}{t} (x+a)^2 e^{tx} - \frac{2}{t^2} (x+a) e^{tx} + \frac{2}{t^2} \int e^{tx} dx \\ &= \frac{1}{t} (x+a)^2 e^{tx} - \frac{2}{t^2} (x+a) e^{tx} + \frac{2}{t^3} e^{tx} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } N_q = (e^{-2} - 5e^{-4} + 1 - 5e^{-2} + 1 - 5e^{-2} + e^{-2} - 5e^{-4})k = 2k(1 - 4e^{-2} - 5e^{-4})$$

$$\Rightarrow N_q = \frac{1 - 4e^{-2} - 5e^{-4}}{1 - e^{-4}} \text{ ή ισοδύναμα } N_q = \frac{1 - 5e^{-2}}{1 - e^{-2}}$$

3. Ένα σήμα με μέγιστο πλάτος κβάντισης $V_{\max} = 1.53$ V και σταθερά απόκλισης $\sigma = 0.1$ V διαμορφώνεται μ' ένα σύστημα PCM. Η απαίτηση είναι ο λόγος σήματος-προς-

θόρυβο στην έξοδο του κβαντιστή να υπερβαίνει τα 51 dB. Να βρεθούν πόσες στάθμες κβάντισης απαιτούνται και πως κωδικοποιούνται οι τιμές του σήματος 1.522 V, 1.27 V, -1.27 V, -1.522 V, 1.529 V και -1.529V.

Απάντηση

Θα χρησιμοποιηθεί η σχέση: $SNR_q = M^2 - 1 \Rightarrow 10 \log_{10}(M^2 - 1) \geq 51 \text{ dB} \Rightarrow M \geq 354 \Rightarrow M = 512$ στάθμες κβάντισης, δηλαδή $n = 9$ -bit PCM.

Επίσης, $2V_{\max} = V_{pp} - a = (M - 1)a \Rightarrow a = \frac{2V_{\max}}{M - 1} = \frac{2 \times 1.53}{511} = 5.988 \text{ mV}$,

$$V_{pp} = M \cdot a = 3.066 \text{ V} \Rightarrow V_{pp}/2 = 1.533 \text{ V}$$

$$x(t_1) = 1.522 \text{ V} \Rightarrow \frac{x(t_1) - (-V_{pp}/2)}{a} = 510.18 \rightarrow 511 \text{ διάστημα} \rightarrow 511 \text{ στάθμη κβάντισης}$$

$$\rightarrow 510 \text{ κωδικός} \rightarrow 510 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 \rightarrow 111111110$$

$$x(t_2) = 1.27 \text{ V} \rightarrow 469 \text{ διάστημα} \rightarrow 469 \text{ στάθμη κβάντισης} \rightarrow 468 \text{ κωδικός στάθμης}$$

$$468 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 \rightarrow 111010100$$

$$x(t_3) = -1.27 \text{ V} \rightarrow 44 \text{ διάστημα} \rightarrow 44 \text{ στάθμη κβάντισης} \rightarrow 43 \text{ κωδικός στάθμης}$$

$$000101011$$

$$x(t_4) = -1.522 \text{ V} \rightarrow 2 \text{ διάστημα} \rightarrow 2 \text{ στάθμη κβάντισης} \rightarrow 1 \text{ κωδικός στάθμης}$$

$$000000001$$

$$x(t_5) = -1.529 \text{ V} \rightarrow 1 \text{ διάστημα} \rightarrow 1 \text{ στάθμη κβάντισης} \rightarrow 0 \text{ κωδικός στάθμης}$$

$$000000000$$

$$x(t_6) = 1.529 \text{ V} \rightarrow 512 \text{ διάστημα} \rightarrow 512 \text{ στάθμη κβάντισης} \rightarrow 511 \text{ κωδικός στάθμης}$$

$$111111111$$

4. Ένα κανάλι μεταφέρει φωνή στην περιοχή 50 - 3300 Hz με συχνότητα δειγματοληψίας 8 kHz και εκπομπή με σύστημα PAM ή PCM.

- α) Ποιο είναι το ελάχιστο εύρος ζώνης του καναλιού για το σύστημα PAM;
- β) Στο σύστημα PCM οι παλμοί κωδικοποιούνται σε 8 επίπεδα και εκπέμπονται σαν δυαδικοί παλμοί. Ποιο είναι το εύρος ζώνης;

γ) Να επαναλάβετε το ερώτημα (β) για $M = 128$ επίπεδα. Να συγκρίνετε το θόρυβο κβάντισης στις δύο περιπτώσεις.

Απάντηση

α) $B_{PAM} = f_s/2 = 4 \text{ kHz}$.

β) $M = 8 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow B_{PCM} = nB_{PAM} = 12 \text{ kHz}$.

γ) $M = 128 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow B_{PCM} = 28 \text{ kHz}$. Τότε: $\frac{N_{q(\beta)}}{N_{q(\gamma)}} = \left(\frac{a_\beta}{a_\gamma}\right)^2 = \left(\frac{M_\gamma}{M_\beta}\right)^2 = 256$.

5. Ένα σήμα εύρους ζώνης συχνοτήτων 100 - 4000 Hz περιορίζεται σε μια τάση $V_{pp} = 3\text{V}$. Το σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα 8 kHz και τα δείγματά του κωδικοποιούνται σε $M = 64$ ισαπέχοντα επίπεδα. Να υπολογιστούν το εύρος ζώνης και ο λόγος σήματος-προς-θόρυβο κβάντισης.

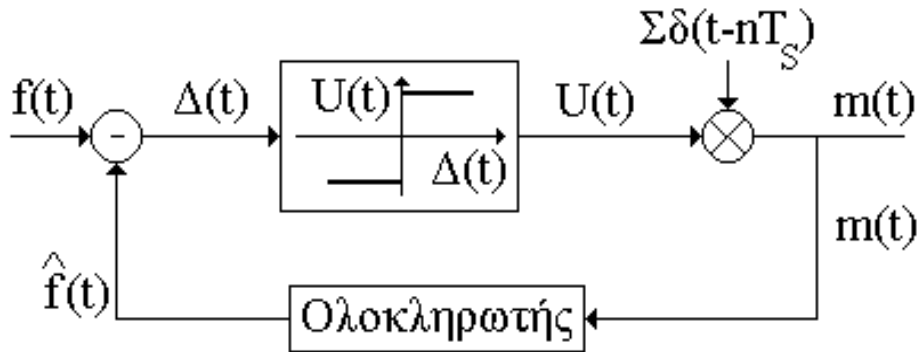
Απάντηση

$M = 64 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow B = nB_{PAM} = nf_s/2 = 24 \text{ kHz}$, $SNR_q = M^2 - 1 = 4095 \Rightarrow SNR_q = 36.12 \text{ (dB)}$

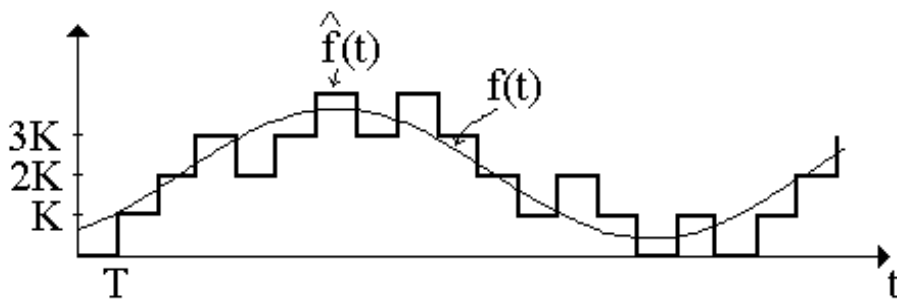
7.6 Το Σύστημα Δέλτα Διαμόρφωσης (DM)

Το σύστημα PCM στέλνει για μετάδοση σειρές παλμών, που αντιπροσωπεύουν τις τιμές του σήματος. Από την άλλη πλευρά το σύστημα Δέλτα Διαμόρφωσης στέλνει παλμούς, οι οποίοι μεταφέρουν πληροφορίες για τις **μεταβολές** του σήματος. Η εξήγηση της λειτουργίας του θα γίνει με τη βοήθεια του Σχήματος 7.6, που παριστάνει τον πομπό σε μορφή *block*. Το σήμα πληροφορίας $f(t)$ αφαιρείται πρώτα από το σήμα $\hat{f}(t)$, το οποίο, όπως θα αποδειχτεί στη συνέχεια, αποτελεί **προσέγγιση** του $f(t)$. Η διαφορά τους $\Delta(t)$ (που είναι θετική ή αρνητική) εισέρχεται σ' έναν απλό κβαντιστή, το εξαγόμενο του οποίου είναι +1, όταν το $\Delta(t) > 0$ και -1 όταν $\Delta(t) < 0$. Κατόπιν, το σήμα αυτό πολλαπλασιάζεται με μια σειρά από συναρτήσεις δέλτα (στενούς παλμούς στην πράξη), που έχουν απόσταση T μεταξύ τους, όπου T είναι η περίοδος δειγματοληψίας. Το τελικό σήμα $m(t)$ είναι σειρά παλμών με τιμή ± 1 , που μεταφέρουν πληροφορίες για το αρχικό

σήμα $f(t)$, και συγκεκριμένα για τις μεταβολές του. Στη συνέχεια, το σήμα $m(t)$ επιστρέφει προς τα πίσω και ολοκληρώνεται. Η εξήγηση, ότι το $\hat{f}(t)$ είναι προσέγγιση του $f(t)$, γίνεται πιο εύκολα αντιληπτή με τη βοήθεια του Σχήματος 7.7.



Σχήμα 7.6. Block διάγραμμα διαμόρφωσης Δέλτα.

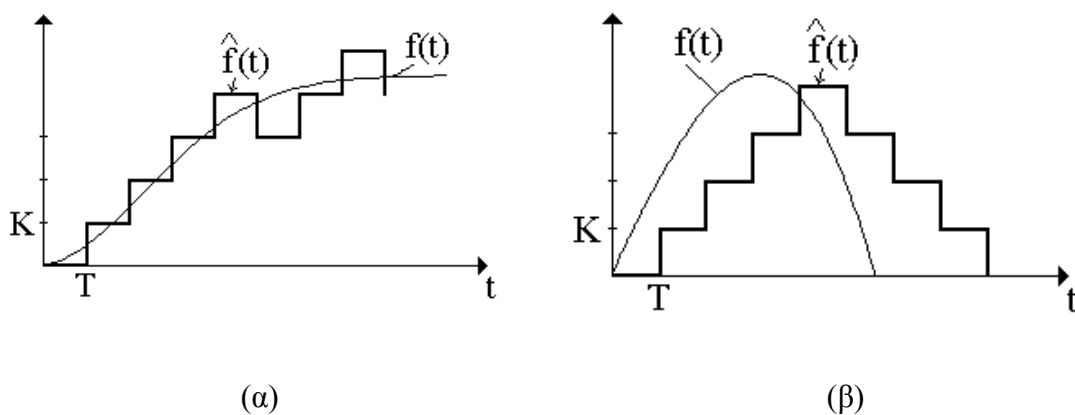


Σχήμα 7.7. Σήμα πληροφορίας $f(t)$ και η προσέγγιση αυτού $\hat{f}(t)$.

Έστω ότι το σήμα $f(t)$ έχει τη μορφή του συνεχούς σήματος του Σχήματος 7.7. Στην αρχή, στο $t = 0$ το $\hat{f}(t) = 0$ και το $\Delta(t) > 0$. Άρα, το $U(t) = 1$, οπότε το $m(t)$ έχει θετικό παλμό. Το ολοκλήρωμα του $m(t)$ (η επιφάνεια κάτω από τον πρώτο παλμό) είναι θετικό και το $\hat{f}(t)$ ανεβαίνει στην τιμή K , που αντιστοιχεί στην τιμή της θετικής επιφάνειας του πρώτου παλμού. Στη συνέχεια, το $f(t)$ είναι πάλι μεγαλύτερο του $\hat{f}(t)$, δηλαδή $\Delta(t) > 0$, οπότε $U(t) = 1$ και πάλι θετικός παλμός στο $m(t)$, επομένως, το $\hat{f}(t)$ ανεβαίνει στο νέο ύψος $2K$. Το ίδιο συμβαίνει και στο επόμενο βήμα. Όμως, στο

τέταρτο βήμα, $\hat{f}(t) > f(t)$ ($\Delta(t) < 0$), οπότε $U(t) = -1$ και ο παλμός του $m(t)$ είναι αρνητικός. Η επιφάνεια του αρνητικού παλμού είναι αρνητική και το $\hat{f}(t)$ πέφτει κ.ο.κ. Έτσι, γίνεται φανερό ότι το $\hat{f}(t)$ αποτελεί προσέγγιση του $f(t)$. Ο δέκτης είναι ένας ολοκληρωτής, ο οποίος φτιάχνει το $\hat{f}(t)$. Τέλος, ένα χαμηλοπερατό φίλτρο εξομαλύνει τις απότομες αλλαγές του $\hat{f}(t)$ και δίνει καλύτερη προσέγγιση του αρχικού σήματος $f(t)$. Αλλά, αφού $\hat{f}(t) \cong f(t)$, τότε οι παλμοί του $m(t)$ μεταφέρουν πληροφορίες για τις μεταβολές του σήματος $f(t)$.

Το σύστημα Δέλτα Διαμόρφωσης είναι πολύ δημοφιλές γιατί είναι απλό και φτηνό, χωρίς να χρειάζεται πολύπλοκες συσκευές κωδικοποίησης. Παρουσιάζει όμως μερικά προβλήματα, με σημαντικότερο την **υπερφόρτωση κλίσης** (*overloading*), η οποία εξηγείται με τη βοήθεια του Σχήματος 7.8β, στο οποίο το $\hat{f}(t)$ αργεί να "πιάσει" το $f(t)$ και όταν το πιάσει, πάλι δεν μπορεί να το παρακολουθήσει. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η κλίση του συστήματος Δέλτα (K/T) είναι πολύ διαφορετική από εκείνη του σήματος $f(t)$. Βέβαια το T μπορεί να γίνει μικρότερο καθώς και το K (βήμα κβάντισης), που αντιπροσωπεύει την επιφάνεια των παλμών, να μεγαλώσει, ώστε να επιλυθεί το πρόβλημα. Γενικά, κάθε σύστημα Δέλτα έχει παραμέτρους K και T , που καθορίζουν **την κλίση της ανόδου** (ή **καθόδου**) του $\hat{f}(t)$ κι αν η κλίση αυτή διαφέρει πολύ από τις κλίσεις των αλλαγών του $f(t)$, τότε συμβαίνει υπερφόρτωση.



Σχήμα 7.8. Διαμόρφωση δέλτα (α) χωρίς υπερφόρτωση και (β) με υπερφόρτωση.

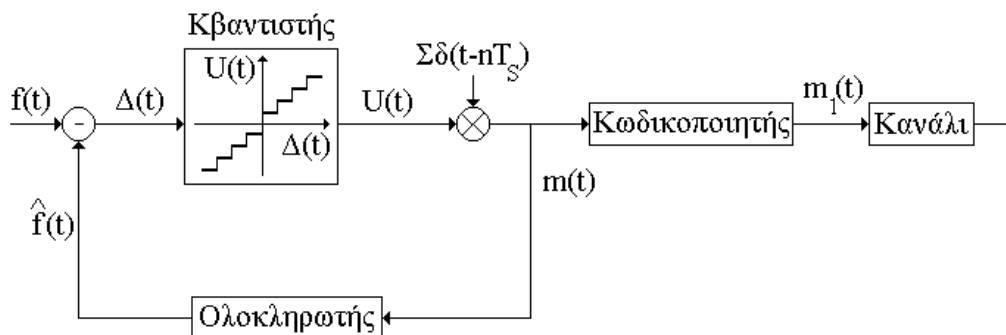
Μερικά συστήματα Δέλτα έχουν την ικανότητα να αλλάζουν αυτόματα τη κλίση τους, ανάλογα με τις αλλαγές των κλίσεων του σήματος, δηλαδή αυτοπροσαρμόζονται. Αυτό γίνεται με βοηθητικά κυκλώματα που παρακολουθούν τη διαφορά των $f(t)$ και $\hat{f}(t)$. Τα συστήματα αυτά λέγονται **Αυτοπροσαρμοζόμενα Δέλτα Συστήματα** (*Adaptive Delta*).

7.7 Το Σύστημα Δέλτα-Σίγμα Διαμόρφωσης (DSM)

Η δέλτα διαμόρφωση είναι ακατάλληλη για την εκπομπή σημάτων που περιέχουν και συνεχή (DC) συνιστώσα. Το πρόβλημα αυτό λύνεται αν το σήμα $f(t)$, πριν εισαχθεί στον πομπό του συστήματος της Δέλτα Διαμόρφωσης, ολοκληρωθεί.

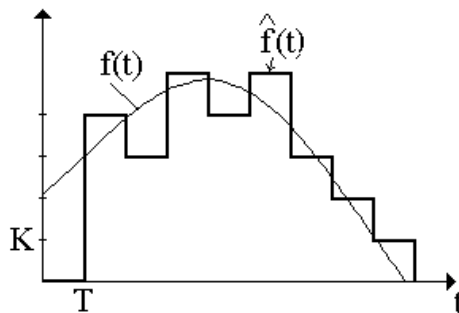
7.8 Το Διαφορικό PCM (DPCM)

Το σύστημα αυτό είναι μια παραλλαγή του συστήματος Δέλτα σε συνδυασμό με το απλό PCM, γι' αυτό και συχνά ονομάζεται και **Δέλτα-PCM**. Στο Σχήμα 7.9 δίνεται ο πομπός του συστήματος DPCM. Η πρώτη διαφορά, που έχει από το σύστημα Δέλτα, είναι ότι ο κβαντιστής έχει πολλές τιμές και όχι μόνο δύο (+1 και -1), όπως εκείνο. Έτσι, το σήμα $U(t)$ έχει πολλές τιμές (ανάλογα με την τιμή της διαφοράς $f(t) - \hat{f}(t)$) και επομένως το $m(t)$ είναι σειρά παλμών ίδιου εύρους, αλλά διαφόρων τιμών πλάτους. Γι' αυτό το λόγο, πριν το σήμα φύγει για το κανάλι, κωδικοποιείται σε νέα σειρά παλμών και έτσι υπάρχει ωφέλεια από τα πλεονεκτήματα του απλού PCM.



Σχήμα 7.9. Block διάγραμμα του διαφορικού PCM.

Η εισαγωγή του κβαντιστή πολλών τιμών (*multilevel*) έχει γίνει για να επιλύσει το πρόβλημα της υπερφόρτωσης, που έχει το κλασικό Δέλτα. Έτσι, αν $f(t) - \hat{f}(t)$ έχει μεγάλη τιμή, το $U(t)$ έχει μεγάλη τιμή και η τιμή του παλμού του $m(t)$ είναι επίσης μεγάλη, και επομένως το $\hat{f}(t)$ παρακολουθεί πιο γρήγορα το $f(t)$. Στο Σχήμα 7.10 φαίνεται ότι, όπου το $\Delta(t)$ έχει μεγάλες τιμές θετικές ή αρνητικές, το αντίστοιχο πηδίο του $\hat{f}(t)$ είναι μεγαλύτερο, και η προσέγγιση του $f(t)$ είναι καλύτερη.



Σχήμα 7.10. Υπερπήδηση του φαινομένου υπερφόρτωσης κλίσης, με χρήση κβαντιστή πολλαπλών τιμών.

7.9 Σύγκριση των Συστημάτων PCM και Δέλτα

Για σταθερό εύρος ζώνης η επίδοση της Δέλτα Διαμόρφωσης είναι πάντα μικρότερη του PCM. Για παράδειγμα, αν το εύρος ζώνης του καναλιού επαρκεί για κώδικα PCM των 8 bits, τότε οι λόγοι σήματος-προς-θόρυβο των συστημάτων PCM και DM είναι 48 και 22 dB, αντίστοιχα. Όμως, τα κυκλώματα, που χρειάζεται ένα σύστημα DM, είναι πολύ απλούστερα και φθηνότερα από εκείνα, που απαιτούνται στο PCM.

7.10 Σύγκριση του PCM με τις Αναλογικές Διαμορφώσεις

Μερικά από τα πλεονεκτήματα του PCM ως προς τα συστήματα αναλογικής διαμόρφωσης είναι:

- α. Στις επικοινωνίες μεγάλων αποστάσεων, τα σήματα PCM μπορούν να αναγεννηθούν πλήρως σε κάθε επαναλήπτη, αρκεί η απόσταση μεταξύ των

επαναληπτών να είναι τέτοια, ώστε ο θόρυβος να παραμένει μικρότερος από το μισό του βήματος κβάντισης.

- β. Στους χαμηλούς λόγους σήματος-προς-θόρυβο εισόδου, ο λόγος SNR του συστήματος PCM είναι καλύτερος απ' ότι των αναλογικών συστημάτων.
- γ. Τα κυκλώματα διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης στα συστήματα PCM είναι όλα ψηφιακά και επομένως προσφέρουν μεγάλη αξιοπιστία και σταθερότητα.
- δ. Οι τεχνικές κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης στα συστήματα PCM περιορίζουν τις επιπτώσεις του θορύβου και των παρεμβολών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

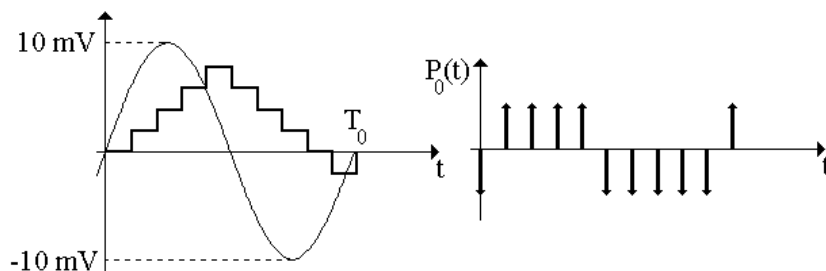
Σ' ένα σύστημα διαμόρφωσης Δέλτα το πληροφοριακό σήμα είναι το $f(t) = 0.01\sin(\omega_0 t)$. Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 20 Hz και το πλάτος των παλμών είναι $k = 2$ mV. Να σχεδιαστούν το $\Delta(t)$, $\hat{f}(t)$ και το σήμα εξόδου $P_0(t)$. Δίνεται $f_0 = 2$ Hz.

Απάντηση

Δίνονται $T_0 = 0.5$ sec και $T = 0.05$ sec, επομένως η μέγιστη κλίση της $f(t)$ είναι: $0.01\omega_0 = 0.126$. Από την άλλη πλευρά, η κλίση του συστήματος Δέλτα είναι ίση με $k/T = 0.04$. Άρα, παρουσιάζεται υπερφόρτωση κλίσης. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό πρέπει είτε το k να μεγαλώσει είτε το T να μειωθεί.

i) k σταθερό, τότε: $\frac{k}{T'} \cong 0.01 \omega_0 \Rightarrow T' \cong 0.0159$ sec $\rightarrow f' = 62.83$ Hz

ii) T σταθερό, τότε: $\frac{k'}{T} \cong 0.01 \omega_0 \Rightarrow k' \cong 6.28$ mV



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. M. Schwartz, *Information, Transmission, Modulation and Noise*, McGraw-Hill Inc., 1970.
2. Ν. – Σ. Τζάννες, *Συστήματα Τηλεπικοινωνιών (Τόμος Ι)*, 1979.
3. K. Sam Shanmugam, *Ψηφιακά και Αναλογικά Συστήματα Επικοινωνίας*, Μετάφραση Κ. Καρούμπαλος, Εκδόσεις Πνευματικού, 1985.
4. G. Kennedy, *Electronic Communication Systems*, 3rd Edition, McGraw-Hill Inc., 1985.
5. H. Taub & D. L. Schilling, *Principles of Communication Systems*, 2nd Edition, McGraw-Hill Inc., 1986.
6. A. Bruce Carlson, *Communication Systems*, 3rd Edition, McGraw-Hill Inc., 1986.
7. F. G. Stremler, *Introduction to Communication Systems*, 3rd Edition, Addison-Wesley Pub. Company, 1990.
8. J. Pearson, *Basic Communication Theory*, Prentice Hall, 1992.
9. Φ. Κωνσταντίνου, Χ. Καψάλη και Π. Κωττή, *Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1995.
10. S. Haykin, *Communication Systems*, 4th Edition, J. Wiley & Sons, Inc., 2001.
11. J. G. Proakis & M. Salehi, *Συστήματα Τηλεπικοινωνιών*, Μετάφραση Κ. Καρούμπαλος, Ε. Ζέρβας, Σ. Καραμπογιός και Ε. Σαγκριώτης, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών, 2002.
12. Α. Κανάτας, *Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πειραιώς, 2009.