Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής

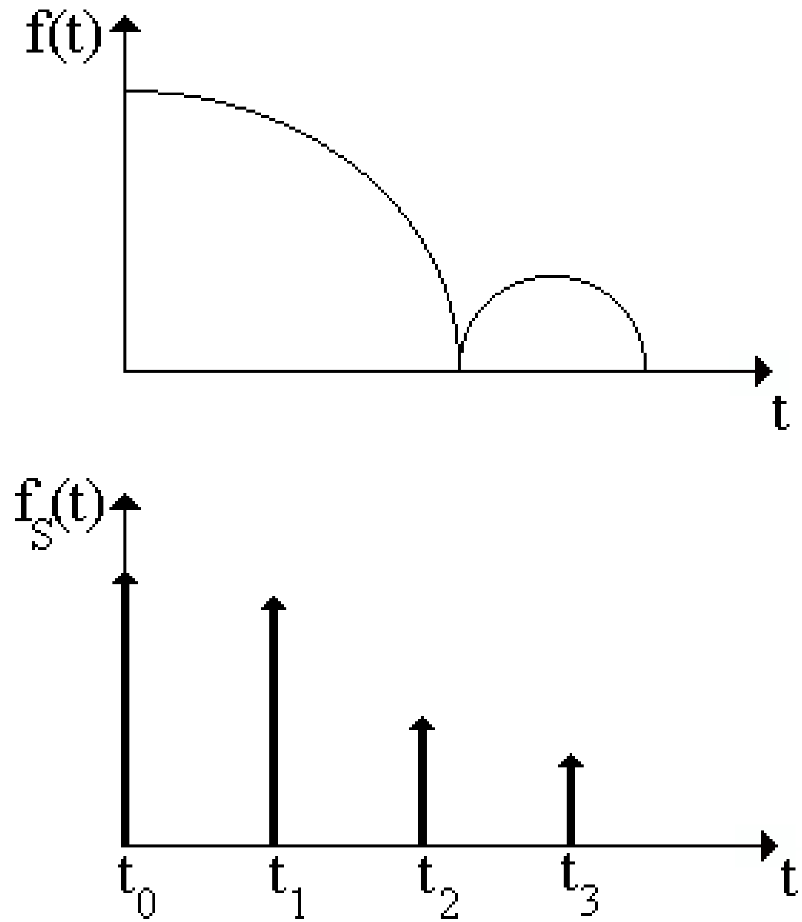
# Εισαγωγή στα Συστήματα Τηλεπικοινωνιών

## Συστήματα Διαμόρφωσης Παλμών

Καθηγητής Ι. Τίγκελης
itigelis@phys.uoa.gr

# ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ (Δ/ΨΙΑ)

- Δειγματοληψία: διαδικασία κατά την οποία από ένα αναλογικό σήμα λαμβάνεται ένας πεπερασμένος αριθμός τιμών του (δείγματα).
- Ιδανική δειγματοληψία: γίνεται με χρήση τρένου δέλτα συναρτήσεων.
- Πραγματική (φυσική) δειγματοληψία: γίνεται με χρήση περιοδικής παλμοσειράς.



# ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

- **Θεώρημα Δειγματοληψίας (Shannon)**

Έστω ένα σήμα $f(t)$, του οποίου ο Μ/Σ Fourier $F(\omega)$ είναι μηδέν για συχνότητες μεγαλύτερες από $\omega_0$. Τότε, οι τιμές του $f(t)$ τις χρονικές στιγμές $t = n\pi/\omega_0$, με $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, προσδιορίζουν πλήρως το σήμα $f(t)$, το οποίο μπορεί να ξαναδημιουργεί από τις τιμές αυτές με τη βοήθεια της σχέσης:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \frac{\sin\left[\omega_0\left(t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right)\right]}{\omega_0\left(t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right)}$$

# ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

- Ο Μ/Σ Fourier του σήματος $f(t)$ είναι: $F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

  και επειδή $F(\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_0$ το σήμα $f(t)$ γράφεται:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

- Το $F(\omega)$ είναι ένα μιγαδικό σήμα στο πεδίο συχνοτήτων $\omega$ περιορισμένο στο διάστημα $(-\omega_0,\ \omega_0)$ και μπορεί να γραφεί σε εκθετική σειρά Fourier στο πεδίο αυτό:

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp\left(in\frac{2\pi}{2\omega_0}\omega\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp\left(inx_0\omega\right)$$

με $F_n=\frac{1}{2\omega_0}\int\limits_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega)e^{-inx_0\omega}d\omega$ και $x_0 = \pi/\omega_0$

# ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

- Με βάση τα παραπάνω:
  - Το σήμα $f(t)$ **προσδιορίζεται πλήρως** από το $F(\omega)$.
  - Το $F(\omega)$ **προσδιορίζεται πλήρως** από τους συντελεστές $F_n$.
  - Συνεπώς, οι συντελεστές $F_n$ **προσδιορίζουν πλήρως** το σήμα $f(t)$ αφού ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\pi}{\omega_0} f\left(-\frac{n\pi}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega) e^{-i\frac{n\pi}{\omega_0}\omega} d\omega$$

$$F_n = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-\frac{n\pi}{\omega_0}\right)$$

# ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

- Τότε, το σήμα *f*(*t*) γράφεται:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{inx_0\omega}e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{\omega_0}f\left(-\frac{n\pi}{\omega_0}\right)\int_{-\omega_0}^{\omega_0}e^{i\omega(t+nx_0)}d\omega=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\omega_0}f\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right)\int_{-\omega_0}^{\omega_0}e^{i\omega\left(t-\frac{n\pi}{\omega_0}\right)}d\omega\Rightarrow$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right)\frac{\sin\left[\omega_0\left(t-\frac{n\pi}{\omega_0}\right)\right]}{\omega_0\left(t-\frac{n\pi}{\omega_0}\right)}$$

# ΙΔΑΝΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

- Η ιδανική δειγματοληψία μπορεί να γίνει (θεωρητικά) με πολλαπλασιασμό του σήματος $f(t)$ με ένα τρένο δέλτα συναρτήσεων και το σήμα $f_S(t)$ που προκύπτει έχει τις τιμές του $f(t)$ τις χρονικές στιγμές $t = n\pi/\omega_0$ και γράφεται:

$$f_S(t) = f(t)\,p(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right)$$

- Ο Μ/Σ Fourier του πολλαπλασιασμού δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου ισούται με τη συνέλιξη των Μ/Σ Fourier αυτών στο πεδίο της συχνότητας:

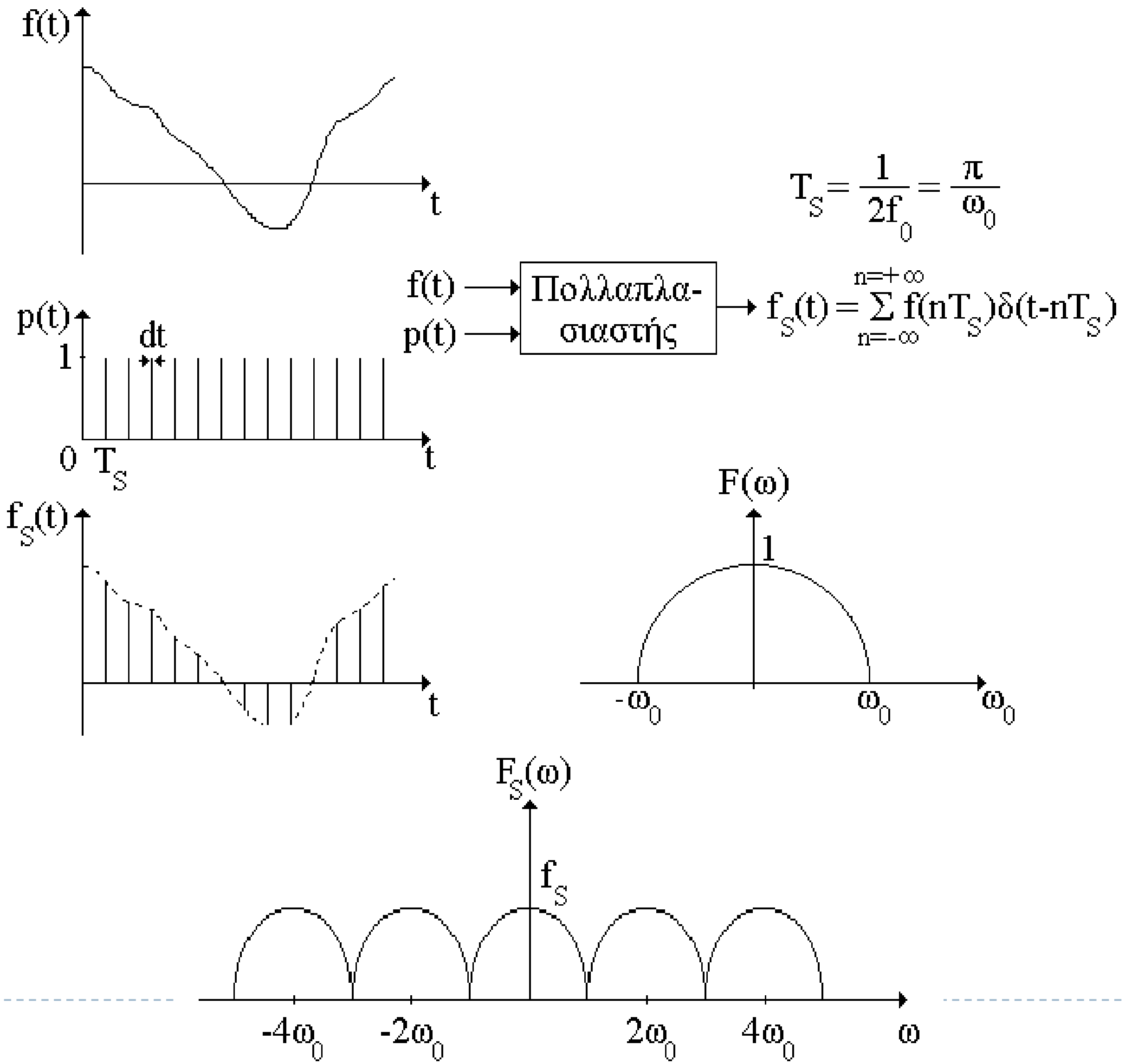
$$F_S(\omega) = \Im[f_S(t)] = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * \frac{2\pi}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - 2n\omega_0)$$

$$F_S(\omega) = \frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega - 2n\omega_0) = f_S\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega - n\omega_S), \quad \omega_S = \frac{2\pi}{T_S} = 2\omega_0$$

# ΙΔΑΝΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

- Είναι φανερό ότι ο Μ/Σ Fourier $F_S(\omega)$ περιέχει το φάσμα του $F(\omega)$ όχι μόνο στη συχνότητα $\omega = 0$ (βασική ζώνη), αλλά και μετατοπισμένο κατά $\pm 2\omega_0$, $\pm 4\omega_0$,... (αρμονικές).
- Προφανώς το σήμα $f_S(t)$ περιέχει όλες τις πληροφορίες του αρχικού σήματος $f(t)$.
- Υπάρχουν κατάλληλα φίλτρα, τα οποία μπορούν να αφαιρέσουν όλες τις αρμονικές εκτός από τη βασική, και να ξαναδώσουν το αρχικό σήμα $f(t)$.

# ΙΔΑΝΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ



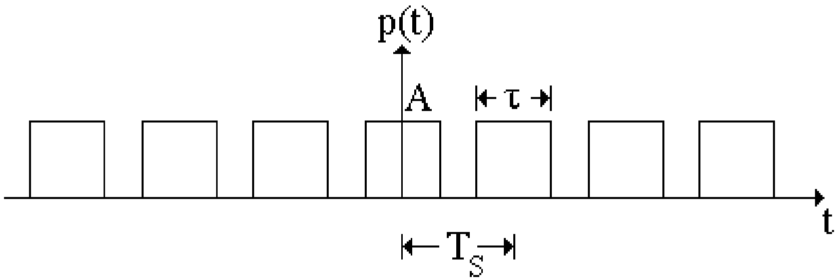
# ΙΔΑΝΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

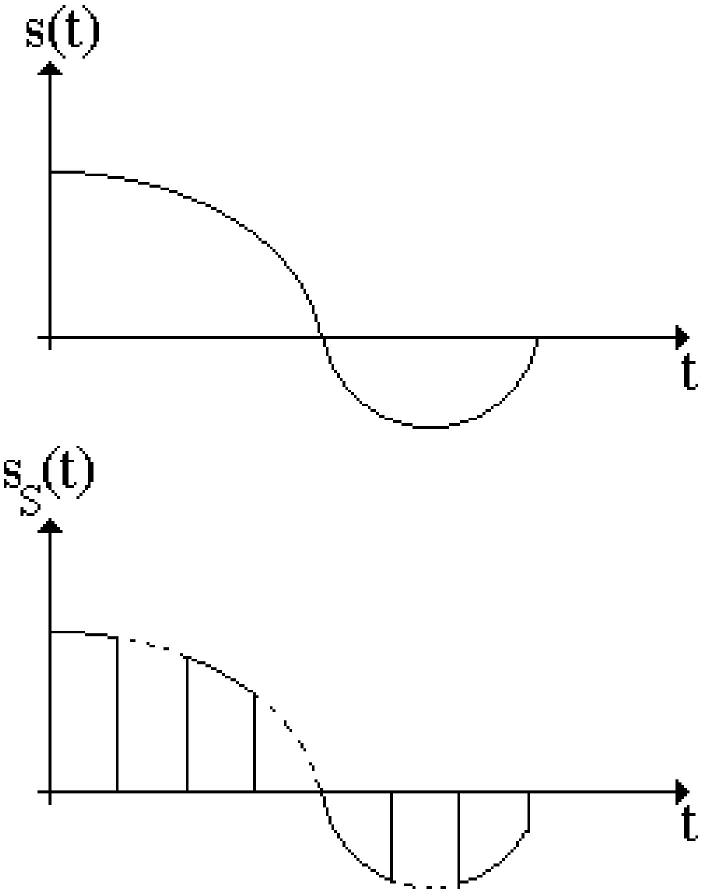
- Όταν τα δείγματα ληφθούν πιο συχνά από $\pi/\omega_0$, τότε η απόσταση μεταξύ των μετατοπισμένων $F(\omega)$ θα είναι μεγαλύτερη και η επανάκτησή του $f(t)$ είναι πιο εύκολη.
- Αντίθετα, αν τα δείγματα ληφθούν πιο αργά από $\pi/\omega_0$, τότε τα μετατοπισμένα $F(\omega)$ θα επικαλύπτονται, με συνέπεια η επανάκτηση του $f(t)$ να είναι αδύνατη. Το φαινόμενο αυτό λέγεται **αλλοίωση**.
- Συνεπώς, οι αποστάσεις των δειγμάτων πρέπει να είναι το πολύ $\pi/\omega_0$. Η μέγιστη αυτή απόσταση $\pi/\omega_0$ ονομάζεται **περίοδος δειγματοληψίας**, ενώ η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας λέγεται **ρυθμός δειγματοληψίας** ή **ρυθμός του *Nyquist*** ($\omega_{S\min} = 2\omega_0$).

# ΙΔΑΝΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

- Στην πράξη υπάρχουν δύο προβλήματα:
  - Δεν υπάρχει σήμα με χαμηλό αρμονικό περιεχόμενο (δηλαδή να έχει $F(\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_0$).
  - Όμως, μπορεί να βρεθεί συχνότητα $\omega_0$, έτσι ώστε η ισχύς ή η ενέργεια τους ως την $\omega_0$ να είναι τουλάχιστον το 95% της συνολικής τιμής.
  - Δεν υπάρχει στην πράξη συνάρτηση δέλτα ούτε τρένο δέλτα συναρτήσεων (χτένα ώσεων).
  - Η δειγματοληψία γίνεται με χρήση περιοδικής παλμοσειράς (φυσική δειγματοληψία).
- Απαραίτητη προϋπόθεση είναι η περίοδος δειγματοληψίας να ικανοποιεί το θεώρημα του Shannon.

# ΦΥΣΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ




$$T_S = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{1}{2 f_0}$$

$$\omega_S = \frac{2\pi}{T_S} = 2\omega_0$$

# ΦΥΣΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

- Επειδή το $p(t)$ είναι ένα περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί σε εκθετική σειρά Fourier:

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n e^{in\omega_S t}$$

όπου οι συντελεστές $P_n$ δίνονται από την σχέση:

$$P_n=\frac{1}{T_S}\int_{-T_S/2}^{T_S/2} p(t)e^{-in\omega_S t}dt=\frac{A\tau}{T_S}Sa\left(\frac{n\omega_S\tau}{2}\right)=\frac{A\tau}{T_S}Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T_S}\right)$$

- Από την τελευταία σχέση είναι φανερό ότι οι συντελεστές $P_n$ ικανοποιούν την σχέση: $P_0 = d \cdot A > P_{|1|} > P_{|2|} > \ldots$

όπου η παράμετρος $d = \tau/T_S$ λέγεται κύκλος δραστηριότητας του παλμού.

# ΦΥΣΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

- Τότε το σήμα $s_S(t)$, που προκύπτει από τη δειγματοληψία, γράφεται:

$$s_S(t) = s(t)p(t) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n e^{in\omega_S t}$$

και ο Μ/Σ Fourier αυτού είναι:

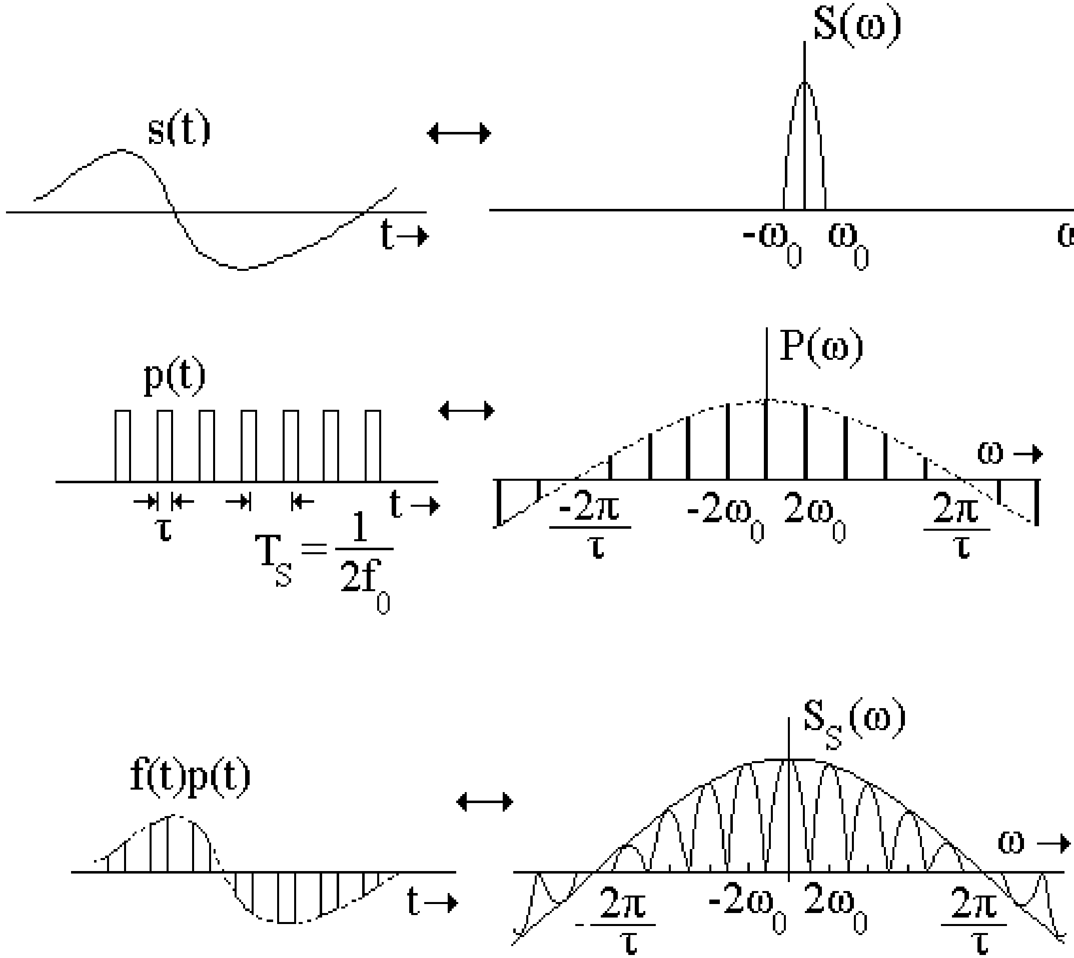
$$S_S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n e^{in\omega_S t} e^{-i\omega t}\right] dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{in\omega_S t} e^{-i\omega t} dt$$

$$S_S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n S(\omega - n\omega_S) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n S(\omega - 2n\omega_0)$$

# ΦΥΣΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

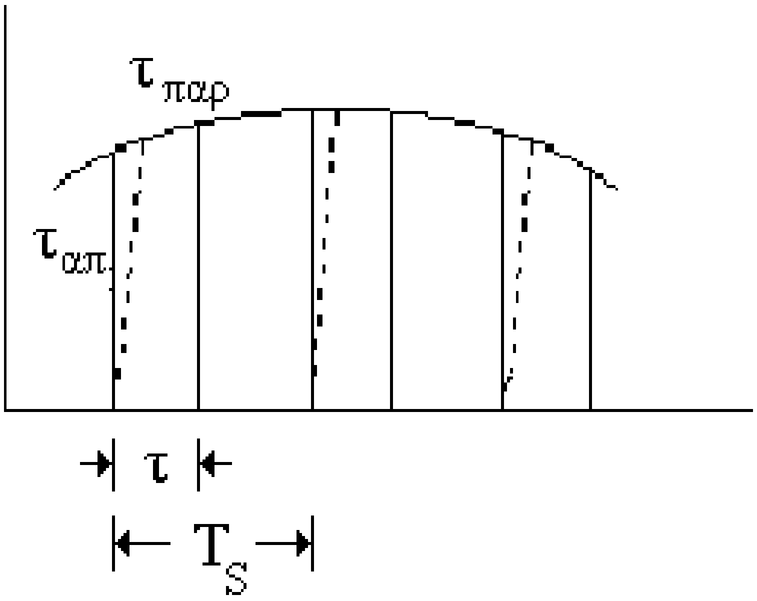
- Είναι φανερό ότι ο $S_S(\omega)$ περιέχει το φάσμα $S(\omega)$ στη συχνότητα $\omega = 0$ καθώς και μετατοπισμένο κατά $\pm 2\omega_0$, $\pm 4\omega_0$, ... (αρμονικές), όπως και στην περίπτωση της ιδανικής δειγματοληψίας.
- Κάθε αρμονική έχει διαφορετικό πλάτος $P_n$ και το πλάτος αυτό μειώνεται με την αύξηση της τάξης $n$ της αρμονικής.
- Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα της φυσικής δειγματοληψίας σε σχέση με την ιδανική, αφού κατά την ανασύσταση του σήματος στον δέκτη το χαμηλοπερατό φίλτρο πρέπει να μηδενίσει πλάτη αρμονικών με σταδιακά μειούμενη τιμή.

# ΦΥΣΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ



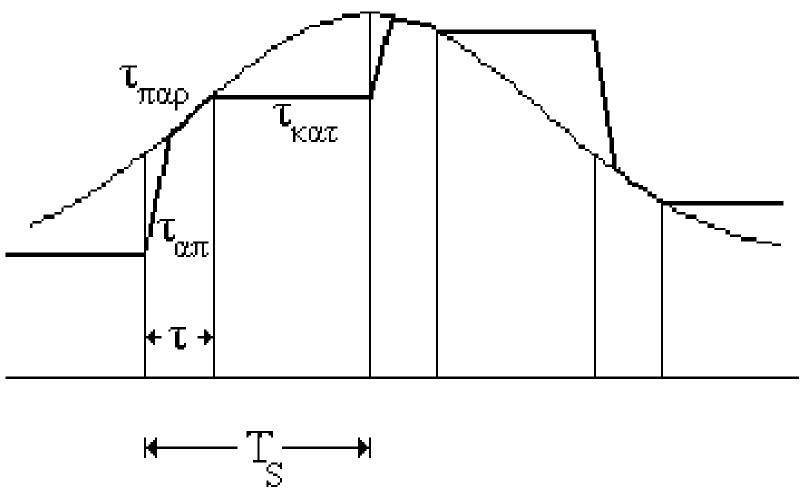
# ΦΥΣΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

- Η διάρκεια $\tau$ των παλμών λέγεται και *χρόνος ανοίγματος* και περιλαμβάνει τον *χρόνο απόκρισης* $\tau_{\alpha\pi}$ και τον *χρόνο παρακολούθησης* $\tau_{\pi\alpha\rho}$ ( $\tau = \tau_{\alpha\pi} + \tau_{\pi\alpha\rho}$).



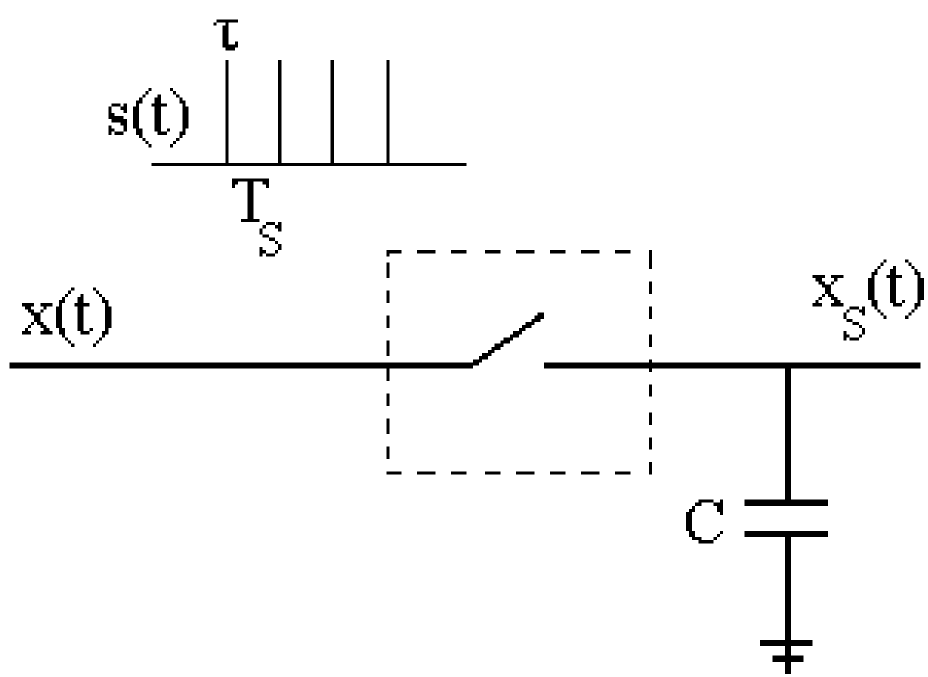
# ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑΚΡΑΤΗΣΗ

- Διαδικασία κατά την οποία η τιμή του κάθε δείγματος μετά το τέλος του χρόνου παρακολούθησης παραμένει σταθερή μέχρι το επόμενο δείγμα.
- Αν $T_S$ είναι η περίοδος δειγματοληψίας και $\tau$ η διάρκεια των παλμών, τότε το διάστημα $T_S - \tau$ ονομάζεται **χρόνος κατακράτησης**.



# ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑΚΡΑΤΗΣΗ

- Η διαδικασία αυτή απαιτεί στην έξοδο της διάταξης να υπάρχει ως στοιχείο «κατακράτησης» του πλάτους κάθε δείγματος ένας πυκνωτής χωρητικότητας *C*.

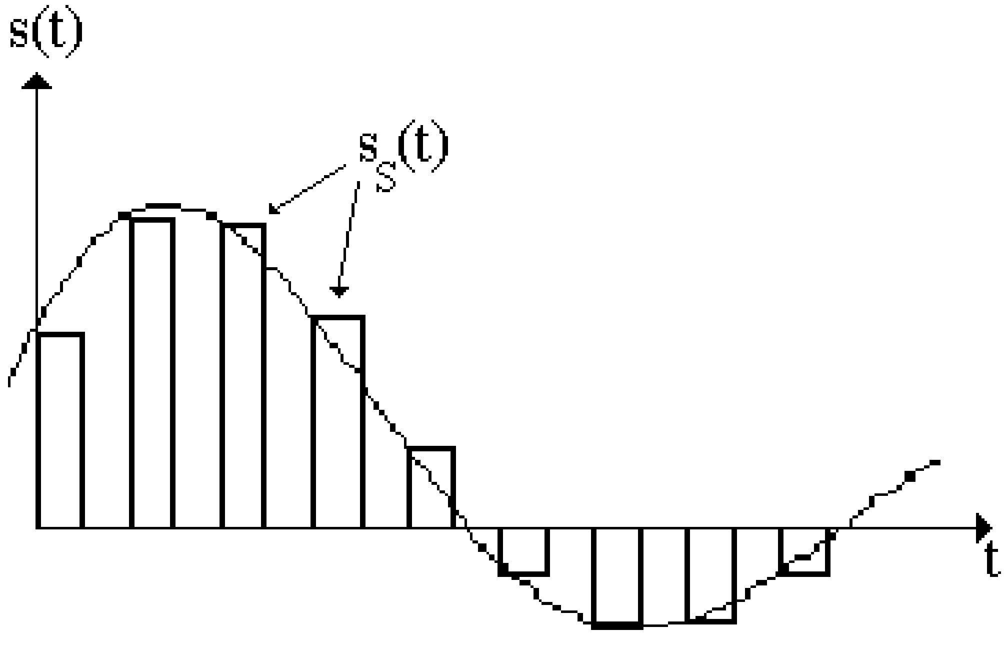


# ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑΚΡΑΤΗΣΗ

- Ο χρόνος ανοίγματος επιλέγεται να είναι αρκετά μικρός και ο χρόνος παρακολούθησης σχεδόν μηδενικός, με συνέπεια η διάρκεια $\tau$ του παλμού να είμαι σχετικά μικρή.
- Η χωρητικότητα $C$ του πυκνωτή καθορίζεται σε συνδυασμό με την τιμή της ωμικής αντίστασης που εμφανίζει ο διακόπτης όταν είναι κλειστός (κατάσταση σύνδεσης) καθώς και την τιμή της αντίστασης εισόδου της επόμενης διάταξης επεξεργασίας όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, ώστε να είναι "γρήγορη" η φόρτισή του μέσα στον χρόνο απόκτησης και "αργή" η εκφόρτισή του, δηλαδή μηδενική μεταβολή της τάσης του, κατά τον χρόνο κατακράτησης.

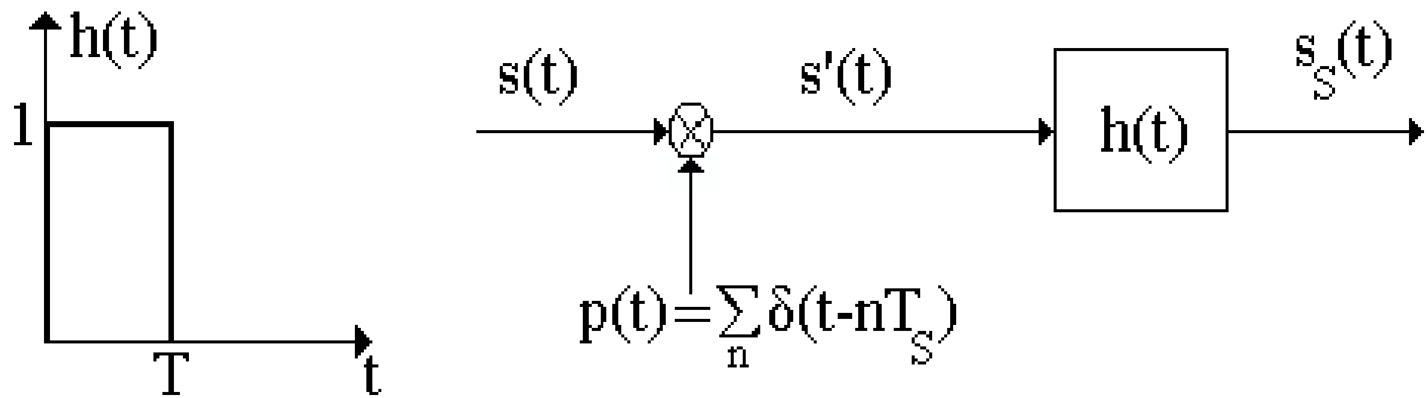
# Δ/ΨΙΑ ΔΙΑΠΛΑΤΥΣΜΕΝΗΣ ΚΟΡΥΦΗΣ

- Αρκετά δημοφιλής δειγματοληψία, στην οποία ο παλμός έχει σταθερό πλάτος σε όλη τη διάρκεια του χρόνου ανοίγματος και η τιμή του είναι ανάλογη του σήματος την χρονική στιγμή της δειγματοληψίας.



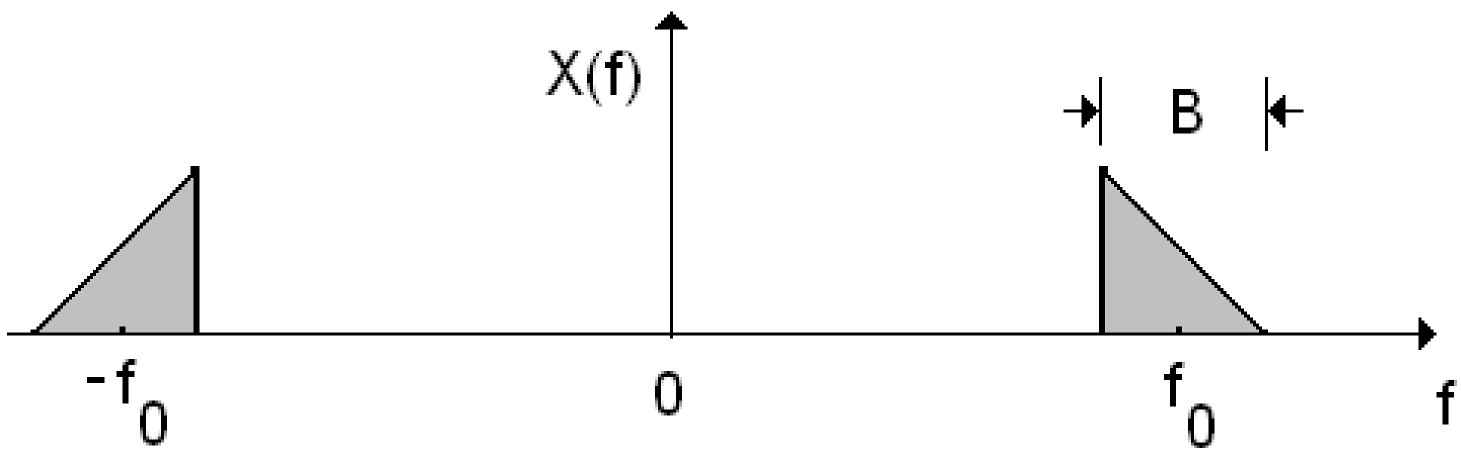
# Δ/ΨΙΑ ΔΙΑΠΛΑΤΥΣΜΕΝΗΣ ΚΟΡΥΦΗΣ

- Το σήμα $s(t)$ πολλαπλασιάζεται με ένα τρένο δέλτα συναρτήσεων και στη συνέχεια περνά μέσα από ένα γραμμικό σύστημα, του οποίου η έξοδος παραμένει σταθερή για ένα μικρό χρονικό διάστημα.



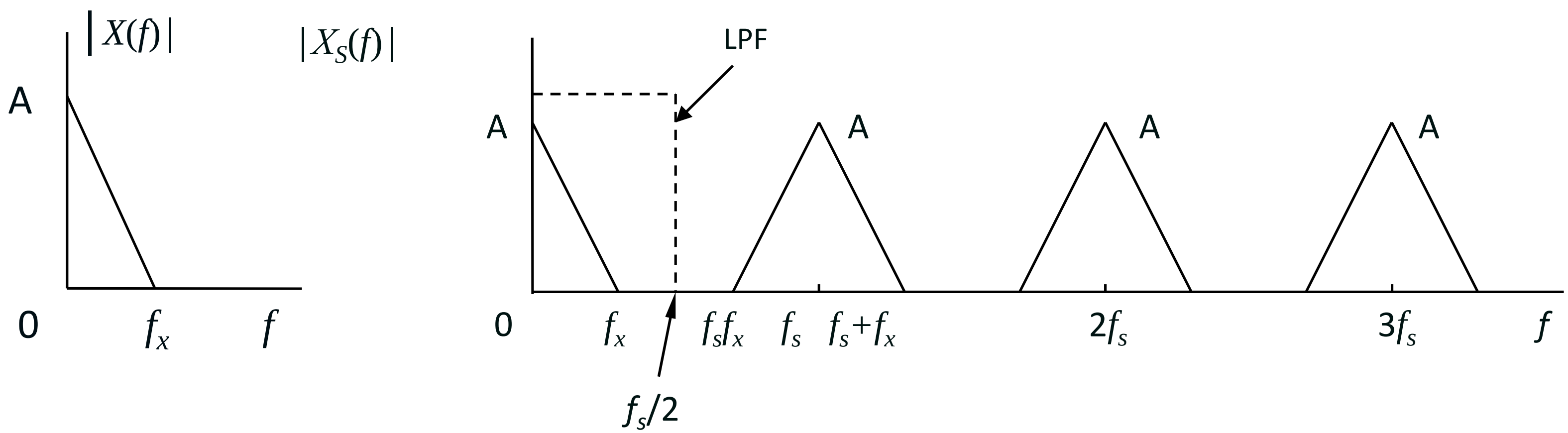
# ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

- Έστω η γενικότερη περίπτωση ενός σήματος, το φάσμα του οποίου είναι περιορισμένο σε μία ζώνη συχνοτήτων εύρους $B$ γύρω από μια κεντρική συχνότητα $f_0$.
- Η επιλογή συχνότητας δειγματοληψίας ίση με τη διπλάσια της μέγιστης συχνότητας του σήματος ($2f_0+B$) είναι σωστή ή υπάρχει και καλύτερη λύση?



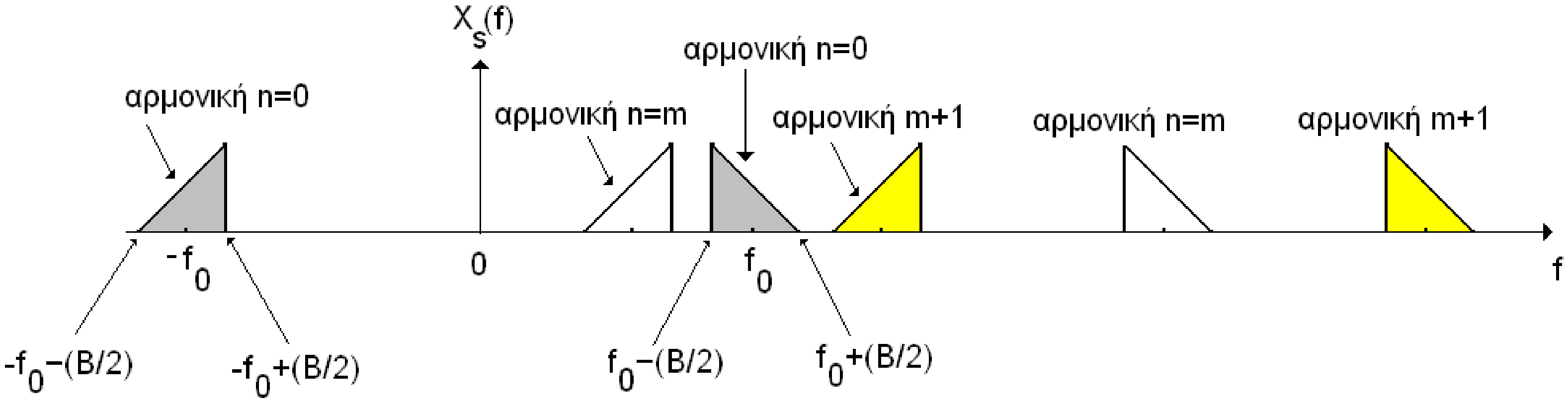
# ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

- Από το θεώρημα δειγματοληψίας είναι γνωστό ότι για να είναι δυνατή η ανάκτηση του (αρχικού) σήματος στον δέκτη, θα πρέπει οι γειτονικές αρμονικές του φάσματος του σήματος που προκύπτει από τη δειγματοληψία να μην επικαλύπτονται.



# ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

- Έστω $m$ και $(m + 1)$ οι αρμονικές που βρίσκονται πιο κοντά στη βασική αρμονική $n = 0$. Οι αρμονικές αυτές προέκυψαν από τη μετατόπιση προς τα δεξιά της βασικής αρμονικής κατά $mf_s$ και $(m + 1)f_s$, αντίστοιχα.
- Για να είναι εφικτή η ανάκτηση του σήματος στον δέκτη, πρέπει να μην επικαλύπτονται μεταξύ τους οι γειτονικές αρμονικές $m$ και $(m + 1)$ καθώς και με τη βασική $(n = 0)$.



# ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

- Για να μην υπάρχει επικάλυψη πρέπει να ισχύουν:

$$mf_S - f_0 + \frac{B}{2} \le f_0 - \frac{B}{2}, \quad (m+1) f_S - f_0 - \frac{B}{2} \ge f_0 + \frac{B}{2}, \quad f_S \ge B$$

σχέσεις που γράφονται και στη μορφή:

$$mf_S \le 2 f_0 - B \qquad (m+1) f_S \ge 2 f_0 + B$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{2 f_0 + B}{m+1} \le f_S \le \frac{2 f_0 - B}{m}$$

- Οι κατάλληλες συχνότητες δειγματοληψίας $f_S$ πρέπει να πληρούν την παραπάνω ανισότητα για ακέραιες τιμές $m$.

# ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

- Για τις διάφορες τιμές του $m$ προκύπτει:

| $m = 0$ | $2f_0 + B \le f_S \le \infty$ |
|---|---|
| $m = 1$ | $\frac{2f_0 + B}{2} \le f_S \le 2f_0 - B$ |
| $m = 2$ | $\frac{2f_0 + B}{3} \le f_S \le \frac{2f_0 - B}{2}$ |
| $m = 3$ | $\frac{2f_0 + B}{4} \le f_S \le \frac{2f_0 - B}{3}$ |

- Συνεπώς, υπάρχει κάποιος ακέραιος αριθμός πέρα από τον οποίον ο δεύτερος όρος της ανισότητας είναι μικρότερος από τον πρώτο.

# ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

- Ο μεγαλύτερος ακέραιος $M$ που ικανοποιεί την ανισότητα είναι:

$$\frac{2f_0+B}{M+1} \le \frac{2f_0-B}{M} \Rightarrow M \le \frac{f_0}{B}-\frac{1}{2} \Rightarrow M = \left\lfloor \frac{f_0}{B}-\frac{1}{2} \right\rfloor$$

- Τότε, η συχνότητα δειγματοληψίας ικανοποιεί την σχέση:

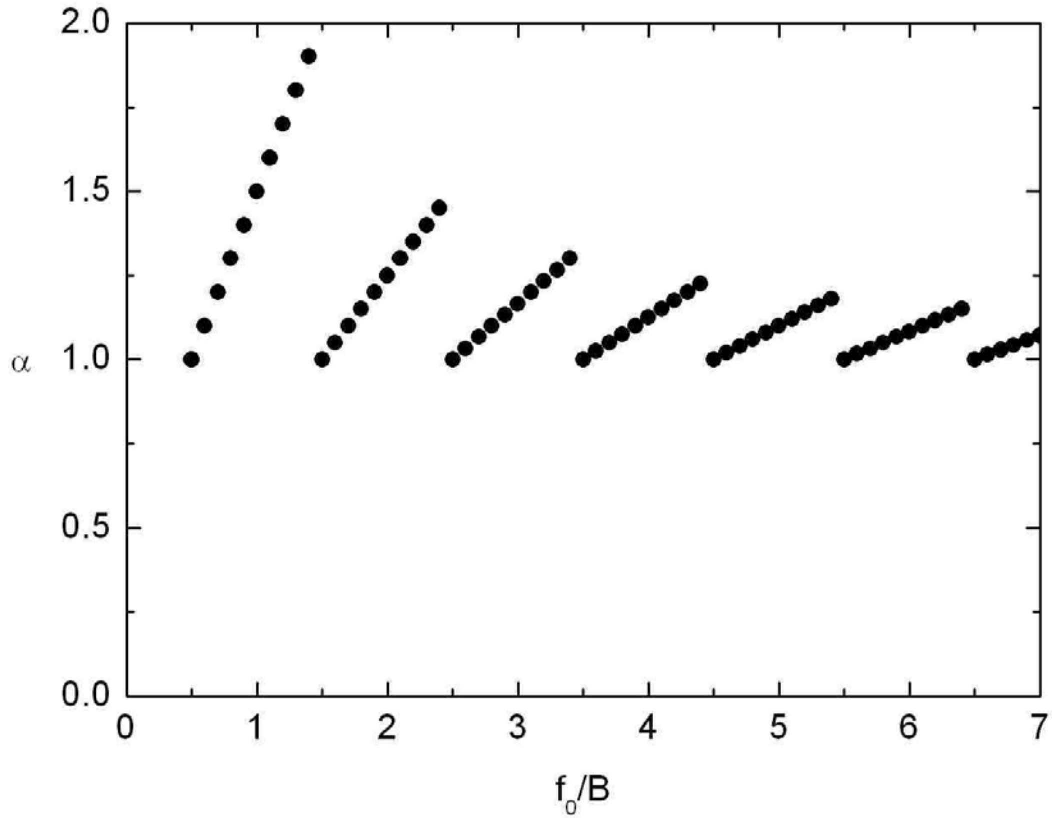
$$\frac{2f_0+B}{\left\lfloor \frac{f_0}{B}-\frac{1}{2} \right\rfloor+1} \le f_S \le \frac{2f_0-B}{\left\lfloor \frac{f_0}{B}-\frac{1}{2} \right\rfloor}$$

- Η ελάχιστη τιμή αυτής είναι:

$$f_{S,\min} = \frac{2f_0+B}{\left\lfloor (f_0/B)+0.5 \right\rfloor} = 2B\frac{\left((f_0/B)+0.5\right)}{\left\lfloor (f_0/B)+0.5 \right\rfloor} = 2Ba$$

# ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

- Η παράμετρος $\alpha$ παίρνει τιμές στο διάστημα [1, 2), δηλ. η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κυμαίνεται μεταξύ $2B$ και $4B$, αρκετά μικρότερη από την τιμή $2f_0+B$.



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Το σήμα $f(t) = \cos(3\pi t) + 0.125\cos(8\pi t)$ υφίσταται ιδανική δειγματοληψία με περίοδο δειγματοληψίας $T_S$.

α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $T_S$ καθώς και η ελάχιστη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας.

β) Αν το τρένο δέλτα συναρτήσεων δίνεται από την σχέση:

$$s(t) = 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-0.125n)$$

και το σήμα που προκύπτει από τη δειγματοληψία είναι:

$$f_S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n\delta(t-0.125n)$$

να βρεθούν οι συντελεστές $I_0$, $I_1$, $I_2$ και να δείξετε ότι ισχύει $I_{n+16} = I_n$.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

γ) Να καθορίσετε το εύρος ζώνης ενός χαμηλοπερατού φίλτρου, έτσι ώστε να είναι δυνατή η επανάκτηση του σήματος *f*(*t*) χωρίς παραμόρφωση.

**Λύση**

α) Από το θεώρημα δειγματοληψίας είναι γνωστό ότι:

$$T_S = \frac{1}{2f_{0(\max)}} = \frac{\pi}{\omega_{0(\max)}} = \frac{\pi}{8\pi} = 0.125\,\text{sec}$$ οπότε $f_S = 1/T_S = 8$ Hz

β) $$f_S(t) = f(t)s(t) = [\cos(3\pi t) + 0.125\cos(8\pi t)]4\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-0.125n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4[\cos(3\pi t) + 0.125\cos(8\pi t)]\delta(t-0.125n)$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4[\cos(3\pi 0.125n) + 0.125\cos(8\pi 0.125n)]\delta(t-0.125n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n \delta(t-0.125n)$$

όπου $I_n = 4[\cos(0.375n\pi) + 0.125\cos(n\pi)]$.

Τότε: $I_0 = 4(1+0.125) = 4.5$, $I_1 = 4(0.383-0.125) = 1.032$,

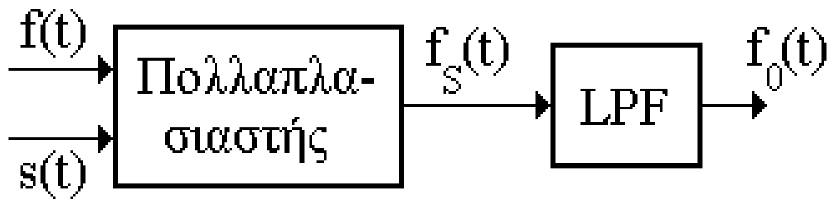
$I_2 = 4(-0.707+0.125) = -0.328$

και $I_{n+16} = 4[\cos(0.375n\pi+6\pi) + 0.125\cos(n\pi+16\pi)] = I_n$

γ) Επειδή $f_{0(\max)} = 4$ Hz $\Rightarrow B_{\text{LPF}} = 4$ Hz.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Έστω ότι το τρένο δέλτα συναρτήσεων $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_S)$ χρησιμοποιείται για τη δειγματοληψία του σήματος $f(t) = \cos(11\omega_1 t) + \cos(12\omega_1 t) + \cos(13\omega_1 t)$ μέσω ενός πολλαπλασιαστή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:




α) Υπολογίστε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας.

β) Προσδιορίστε την έκφραση του $f_S(t)$.

γ) Προσδιορίστε την έκφραση του σήματος εξόδου $f_0(t)$, αν το εύρος ζώνης του φίλτρου είναι $BW = 2\omega_1$ ή $BW = 4\omega_1$.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

**Λύση**

(α) Επειδή η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι $13\omega_1$, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας θα έπρεπε να ήταν διπλάσια της μέγιστης, δηλαδή $\omega_S = 26\omega_1$.

Όμως το σήμα είναι κενταρισμένο γύρω από μια κεντρική συχνότητα (στη συγκεκριμένη περίπτωση $12\omega_1$) με εύρος ζώνης $2\omega_1$. Άρα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το γενικευμένο θεώρημα δειγματοληψίας με $\omega_0 = 12\omega_1$ και $B = 2\omega_1$. Τότε η παράμετρος $\alpha = 6.5/[6.5] \approx 1.083$ και η $\omega_S = 4.333\omega_1$.

Είναι προφανές ότι η τελευταία συχνότητα είναι αρκετά μικρότερη από την $26\omega_1$.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

(β) Το σήμα δειγματοληψίας $s(t)$ ως περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί σε εκθετική σειρά Fourier:

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{in\omega_S t} \quad \text{όπου} \quad S_n=\frac{1}{T_S}\int_{-T_S/2}^{T_S/2} s(t)e^{-in\omega_S t}dt=\frac{1}{T_S}$$

δηλαδή

$$s(t)=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\omega_S t}=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\cos(n\omega_S t)+i\sin(n\omega_S t)]=\frac{1}{T_S}+\frac{2}{T_S}\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(n\omega_S t)$$

Τότε, το σήμα $f_S(t)$, που προκύπτει από τη δειγματοληψία, γράφεται:

$$f_S(t)=[\cos(11\omega_1 t)+\cos(12\omega_1 t)+\cos(13\omega_1 t)]\frac{1}{T_S}[1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(n\omega_S t)]$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

$$= \frac{1}{T_S}[\cos(11\omega_1 t) + \cos(12\omega_1 t) + \cos(13\omega_1 t)]$$

$$+ \frac{2}{T_S}\sum_{n=1}^{+\infty}[\cos(11\omega_1 t) + \cos(12\omega_1 t) + \cos(13\omega_1 t)]\cos(n\omega_S t)$$

$$= \frac{1}{T_S}[\cos(11\omega_1 t) + \cos(12\omega_1 t) + \cos(13\omega_1 t)]$$

$$+ \frac{1}{T_S}\sum_{n=1}^{+\infty}\{\cos[(11\omega_1 + n\omega_S)t] + \cos[(11\omega_1 - n\omega_S)t]$$

$$+ \cos[(12\omega_1 + n\omega_S)t] + \cos[(12\omega_1 - n\omega_S)t]$$

$$+ \cos[(13\omega_1 + n\omega_S)t] + \cos[(13\omega_1 - n\omega_S)t]\}$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Η τελευταία εξίσωση με αντικατάσταση της $\omega_S$ γράφεται:

$$f_S(t) = \frac{1}{T_S}[\cos(11\omega_1 t) + \cos(12\omega_1 t) + \cos(13\omega_1 t)]$$

$$+\frac{1}{T_S}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big\{\cos[(11\omega_1 + 4.333n\omega_1)t] + \cos[(11\omega_1 - 4.333n\omega_1)t]$$

$$+\cos[(12\omega_1 + 4.333n\omega_1)t] + \cos[(12\omega_1 - 4.333n\omega_1)t]$$

$$+\cos[(13\omega_1 + 4.333n\omega_1)t] + \cos[(13\omega_1 - 4.333n\omega_1)t]\Big\}$$

Από την έκφραση της $f_S(t)$ προκύπτει ότι οι συχνότητες των αρμονικών μέχρι τάξης $n = 5$ είναι:

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

- $n = 0$ $11\omega_1, 12\omega_1, 13\omega_1$
- $n = 1$ $15.333\omega_1,\ 6.667\omega_1,\ 16.333\omega_1,$
  $7.667\omega_1,\ 17.333\omega_1,\ 8.667\omega_1$
- $n = 2$ $19.666\omega_1,\ 2.334\omega_1,\ 20.666\omega_1,$
  $3.334\omega_1,\ 21.666\omega_1,\ 4.334\omega_1$
- $n = 3$ $23.999\omega_1,\ -1.999\omega_1,\ 24.999\omega_1,$
  $-0.999\omega_1,\ 25.999\omega_1,\ 0.001\omega_1$
- $n = 4$ $28.332\omega_1,\ -6.332\omega_1,\ 29.332\omega_1,$
  $-5.332\omega_1,\ 30.332\omega_1,\ -4.332\omega_1$
- $n = 5$ $32.665\omega_1,\ -10.665\omega_1,\ 33.665\omega_1,$
  $-9.665\omega_1,\ 34.665\omega_1,\ -8.665\omega_1$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

(γ) Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η συνάρτηση $f_0(t)$ είναι:

(i) $f_0(t) = \frac{A}{T_S}\left\{\cos[0.001\omega_1 t] + \cos[0.999\omega_1 t] + \cos[1.999\omega_1 t]\right\}$

όταν BW = $2\omega_1$

(ii) $f_0(t) = \frac{A}{T_S}\left\{\begin{array}{l}\cos[0.001\omega_1 t] + \cos[0.999\omega_1 t] + \cos[1.999\omega_1 t] \\ + \cos[2.334\omega_1 t] + \cos[3.334\omega_1 t]\end{array}\right\}$

όταν BW = $4\omega_1$

και $A$ είναι η ενίσχυση ή η εξασθένηση του φίλτρου.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Για τα σήματα Sa(200$\pi t$) και [Sa(200$\pi t$)]$^2$ να βρείτε τον ρυθμό *Nyquist* και την περίοδο δειγματοληψίας.

**Λύση**

Το πρώτο σήμα είναι της μορφής sin(200$\pi t$)/(200$\pi t$), οπότε η μέγιστη (κυκλική) συχνότητα είναι $\omega_{0(\max)} = 200\pi$ rad/sec δηλαδή $f_{0(\max)} = 100$ Hz $\Rightarrow f_S = 200$ Hz και $T_S = 1/200$ sec.

Το δεύτερο σήμα είναι της μορφής:

$Sa^2(x) = (\sin x/x)^2 = (1 - \cos(2x))/(2x^2)$

οπότε η μέγιστη συχνότητα είναι $\omega_{0(\max)} = 400\pi$ rad/sec, δηλαδή $f_{0(\max)} = 200$ Hz $\Rightarrow f_S = 400$ Hz και $T_S = 1/400$ sec.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

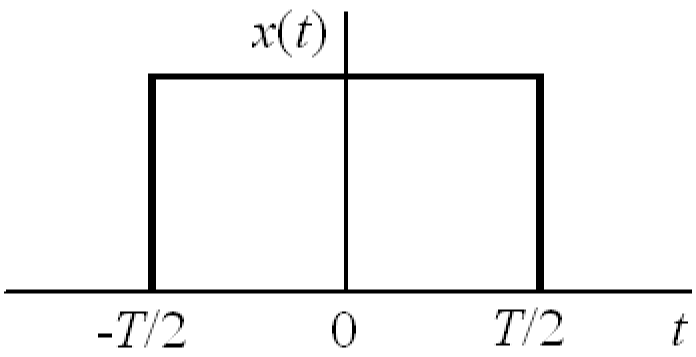
Έστω το σήμα $f(t) = \mathrm{Sa}(200\pi t)$. Να σχεδιαστούν τα $f(\mathrm{t})$ και $F(f)$. Αν ένα τρένο δέλτα συναρτήσεων $\delta_T(t)$ χρησιμοποιείται για τη δειγματοληψία του $f(t)$, να σχεδιαστούν τα φάσματα των $\delta_T(t)$ και $f(t)\delta_T(t)$ για $T$ = 1/400, 1/200, και 1/100.

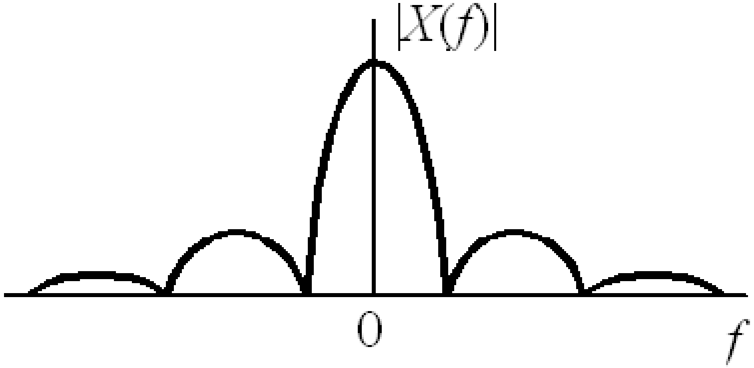
**Λύση**

Από την ιδιότητα συμμετρίας του Μ/Σ Fourier είναι γνωστό ότι αν ο Μ/Σ Fourier ενός σήματος $x(t)$ είναι $X(\omega)$, τότε ο Μ/Σ Fourier του σήματος $X(t)$ είναι $2\pi x(-\omega)$ ή στο πεδίο της συχνότητας $x(-f)$.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Επίσης, είναι γνωστό ότι ο Μ/Σ Fourier ενός παλμού είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας, δηλαδή




$$x(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$X(f) = T\,\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

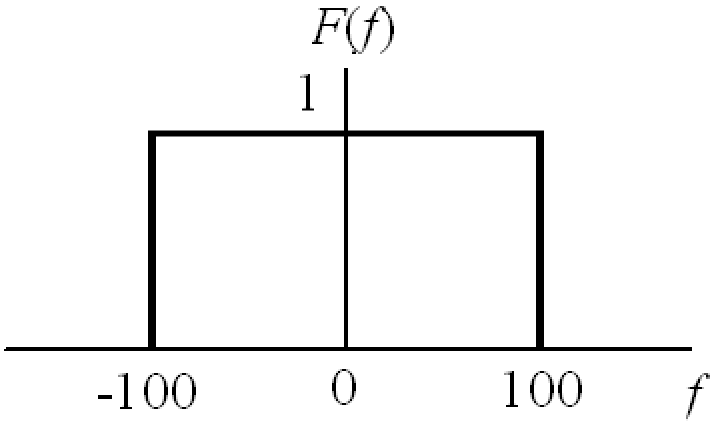
Άρα μπορούν να γίνουν οι αντιστοιχίσεις: $T \leftrightarrow 200$, $f \leftrightarrow t$ και το αρχικό σήμα μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$f(t) = \frac{\sin(200\pi t)}{(200\pi t)} = \frac{1}{200}\left[200\frac{\sin(200\pi t)}{(200\pi t)}\right]$$

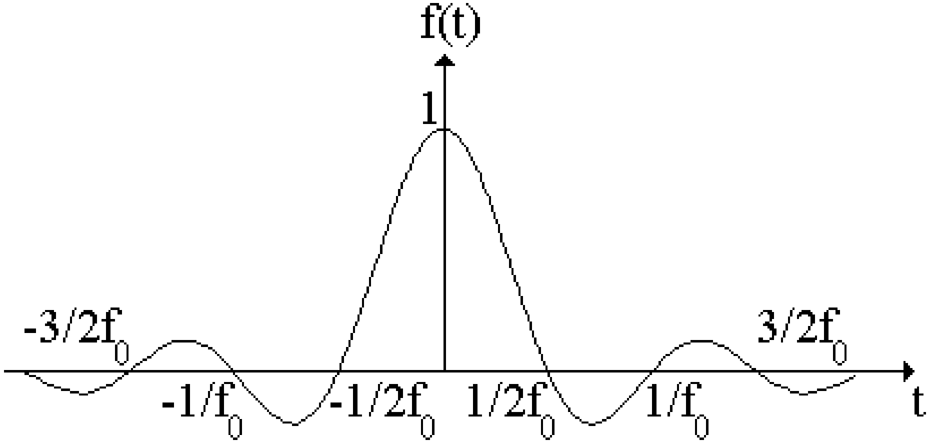
Ο όρος εντός της αγκύλης έχει τη μορφή του σήματος $X(f)$ της προηγούμενης διαφάνειας και μπορεί να εφαρμοστεί η ιδιότητα της συμμετρίας του Μ/Σ Fourier.

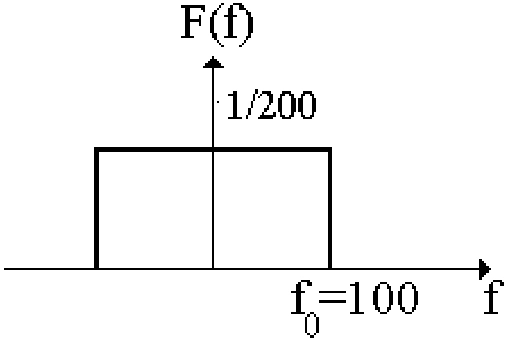
Δηλαδή, η εντός της αγκύλης συνάρτηση έχει Μ/Σ Fourier ένα τετραγωνικό παλμό με πλάτος 1 και διάρκεια «$T$» (στο πεδίο της συχνότητας $2f_0$=200) συμμετρικά ως προς το μηδέν.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4



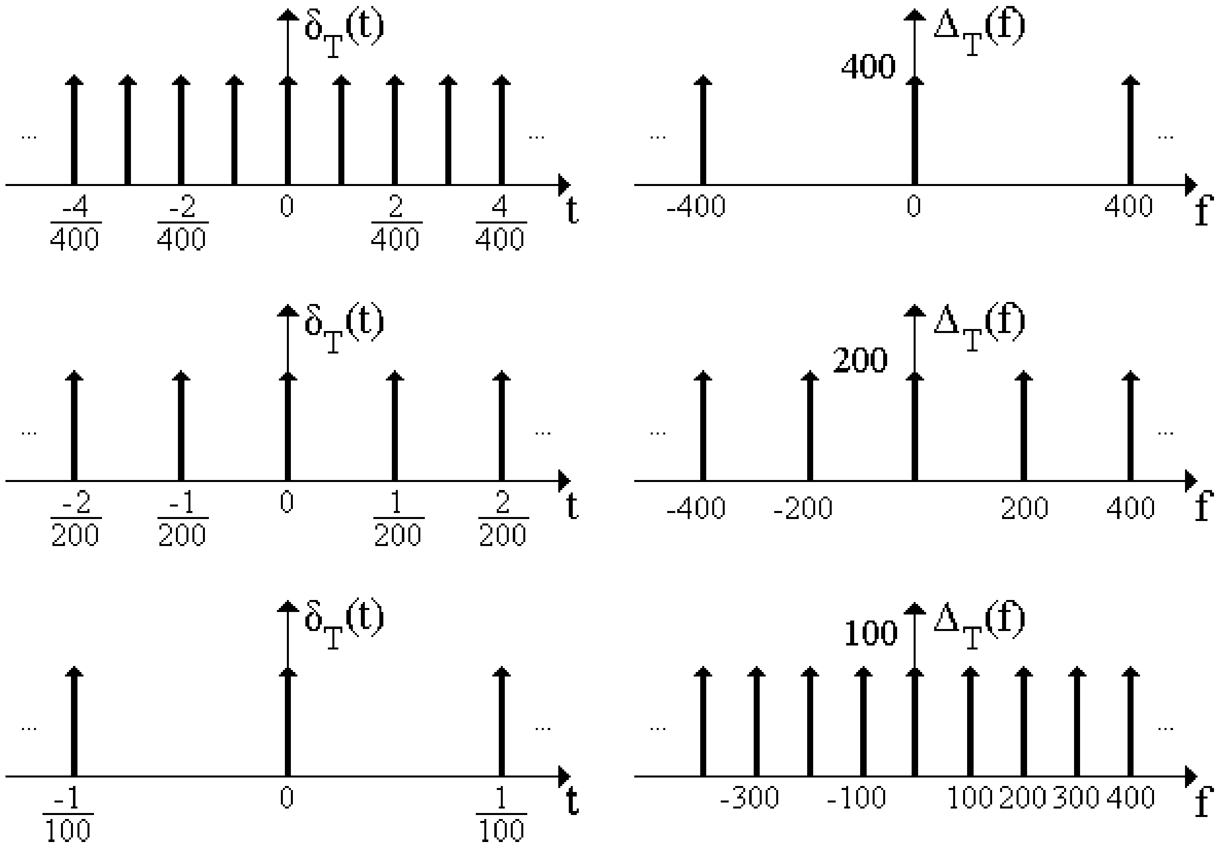

Επομένως, τα διαγράμματα των *f*(*t*) και *F*(*f*) είναι:



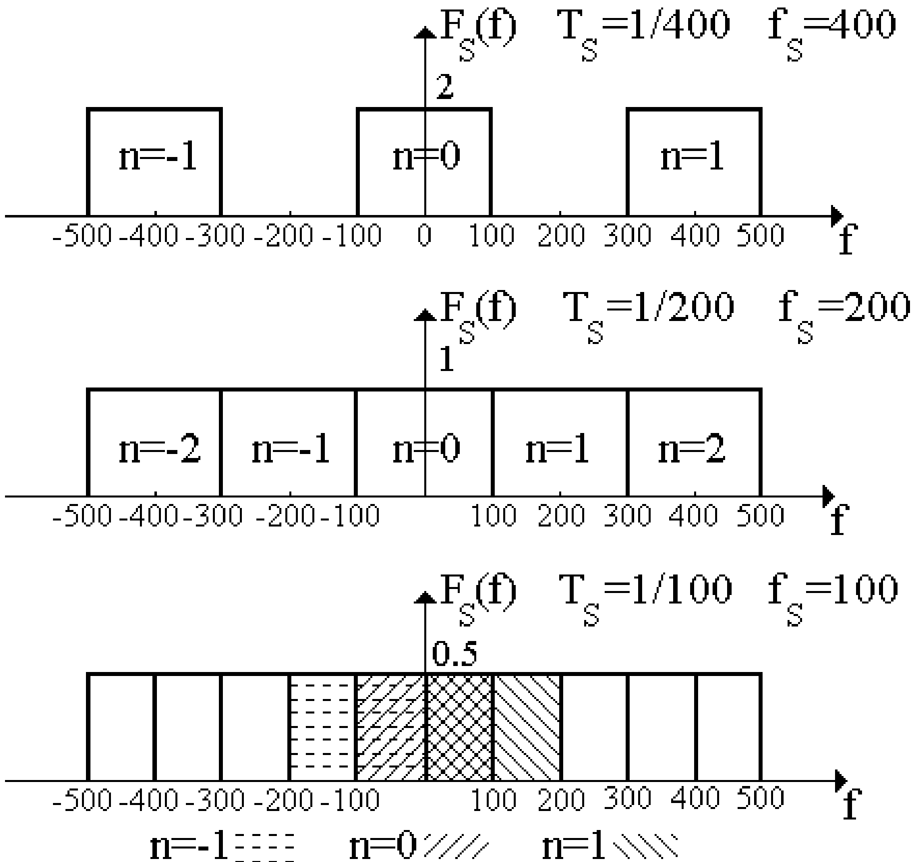
# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Τα διαγράμματα της $\delta_T(t)$ στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας είναι:



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

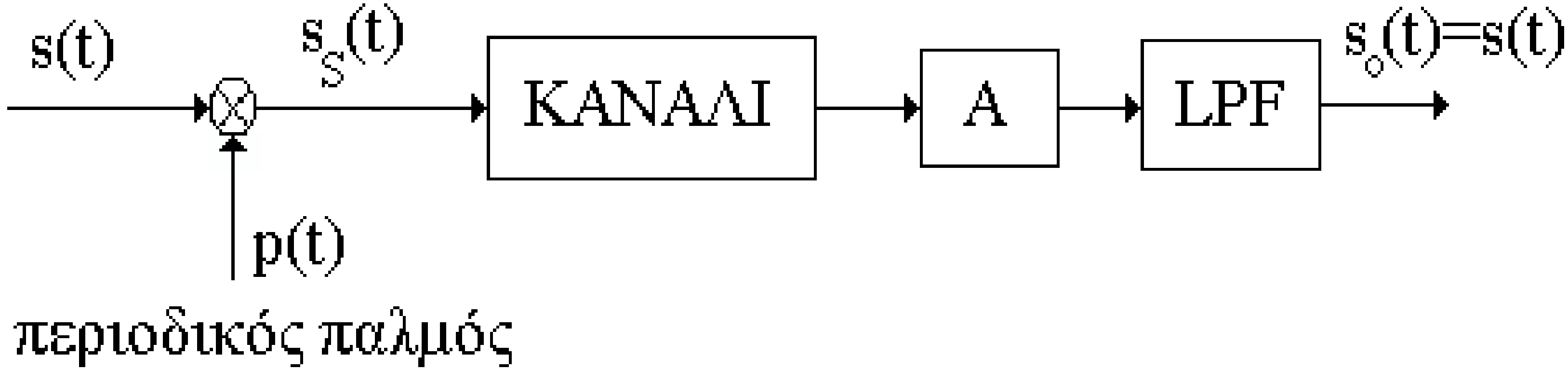
Τα διαγράμματα της $f_S(t)=f(t)\delta_T(t)$ στο πεδίο της συχνότητας είναι:



# ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΛΑΤΟΥΣ ΠΑΛΜΩΝ

- Ουσιαστικά η δειγματοληψία συνεχούς σήματος αποτελεί τη διαμόρφωση πλάτους παλμών (Pulse Amplitude Modulation, PAM).
- Στον πομπό γίνεται φυσική δειγματοληψία και το σήμα που προκύπτει αποτελείται από σειρά παλμών με πλάτος ανάλογο με τις τιμές του σήματος πληροφορίας.
- Το κανάλι είναι συνήθως ένα χαμηλοπερατό φίλτρο από όπου περνά ένα μέρος του φάσματος των παλμών.
- Στον δέκτη, μετά από ενίσχυση, το σήμα μετατρέπεται στην αρχική του μορφή με τη βοήθεια ενός φίλτρου διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων (χαμηλοπερατό φίλτρο).

# ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΛΑΤΟΥΣ ΠΑΛΜΩΝ

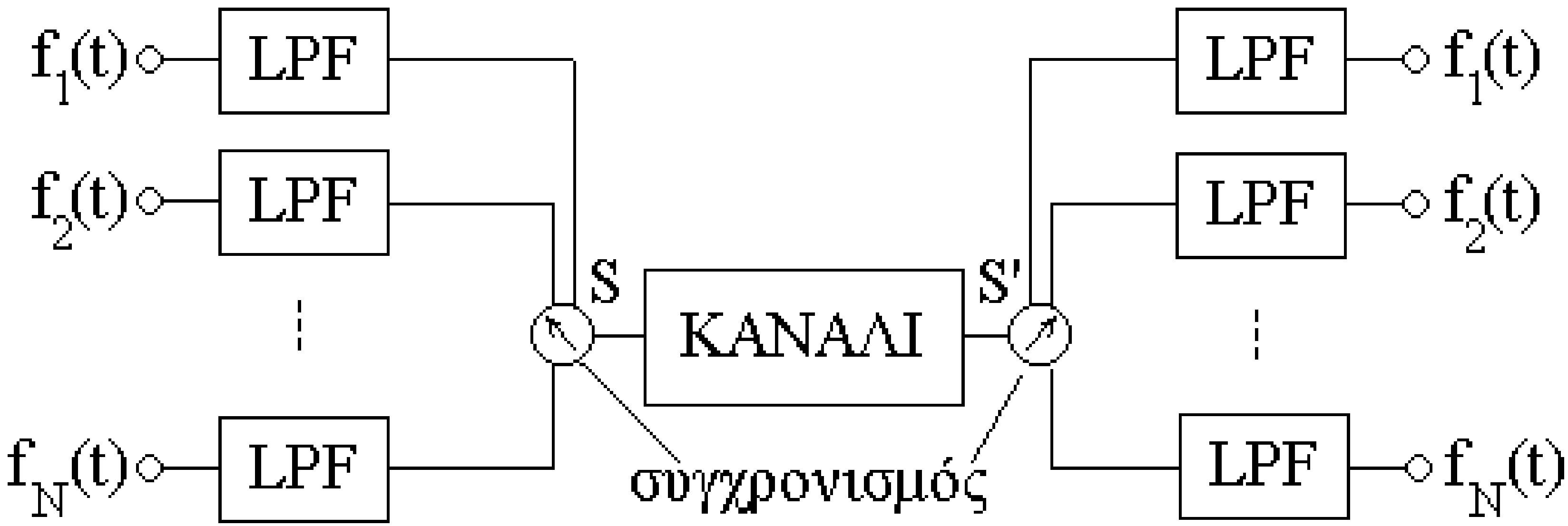



- Το σύστημα PAM δεν έχει κανένα πρακτικό ενδιαφέρον, όταν χρησιμοποιείται για τη μετάδοση <u>ενός μόνο</u> σήματος πληροφορίας.
- Εκείνο που το κάνει ενδιαφέρον και ιδιαίτερα χρήσιμο είναι η δυνατότητά του για τη μετάδοση πολλών σημάτων "ταυτόχρονα".

# ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- Έστω ένα σήμα $f(t)$ με μέγιστη συχνότητα $f_{\mathrm{max}} = 5$ kHz.
- Από το θεώρημα του Shannon τα δείγματα του σήματος πρέπει να λαμβάνονται με ρυθμό 10 kHz, δηλαδή 10.000 δείγματα ανά sec ή ένα δείγμα κάθε $10^{-4}$ sec (100 μsecs).
- Αν η δειγματοληψία γίνεται με περιοδικούς παλμούς με άνοιγμα παλμού 5 μsecs, τα υπόλοιπα 95 μsecs (από τα 100 μsecs της περιόδου δειγματοληψίας) μένουν άχρηστα.
- Ο χρόνος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί από άλλα σήματα.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται Πολυπλεξία στο Πεδίο του Χρόνου (Time Division Multiplexing, TDM).

# ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ




- Στον πομπό το χαμηλοπερατό φίλτρο περιορίζει όλα τα σήματα πληροφορίας μέχρι τη συχνότητα $f_{\max}$.
- Ο ηλεκτρονικός διακόπτης S στρέφεται με συχνότητα $2f_{\max}$ (γιατί?).

# ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

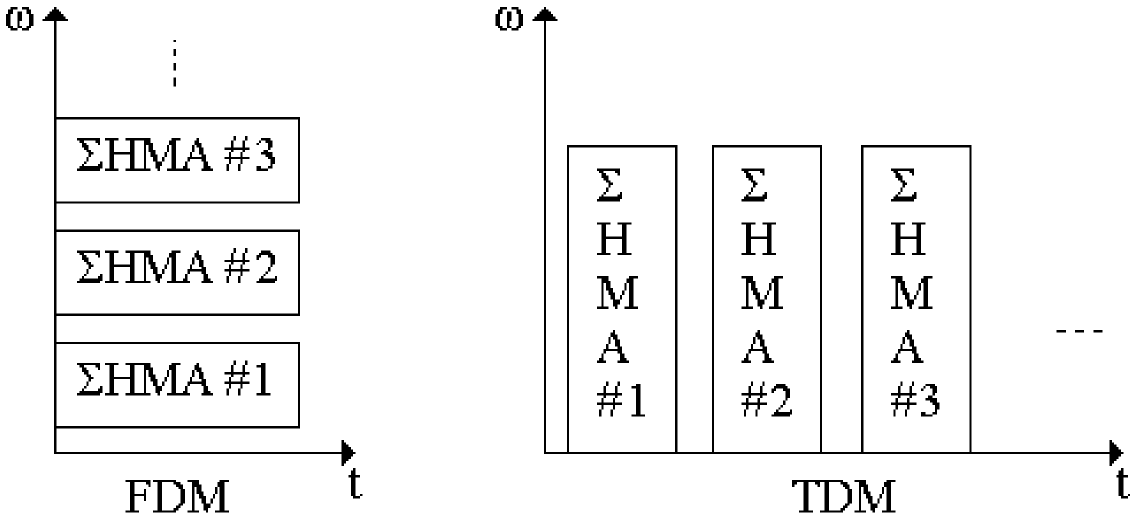
- Σε κάθε σήμα παραμένει για ένα μικρό χρονικό διάστημα «χρονοθυρίδα» (time-slot).
- Το χρονικό διάστημα μεταξύ γειτονικών δειγμάτων λέγεται «χρόνος ασφαλείας» (guard time) και ο ρόλος του είναι να μηδενίσει ή τουλάχιστον να περιορίσει την εμφάνιση αλληλοεπικαλύψεων των δειγμάτων διαδοχικών σημάτων, η οποία λέγεται διομιλία (cross-talk).
- Αν η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_S$ και πολυπλέκονται $N$ σήματα, τότε ισχύει η σχέση:

$$N(\tau_p + \tau_g) = T_S$$

όπου $\tau_p$ είναι η χρονική διάρκεια της χρονοθυρίδας και $\tau_g$ ο χρόνος ασφαλείας.

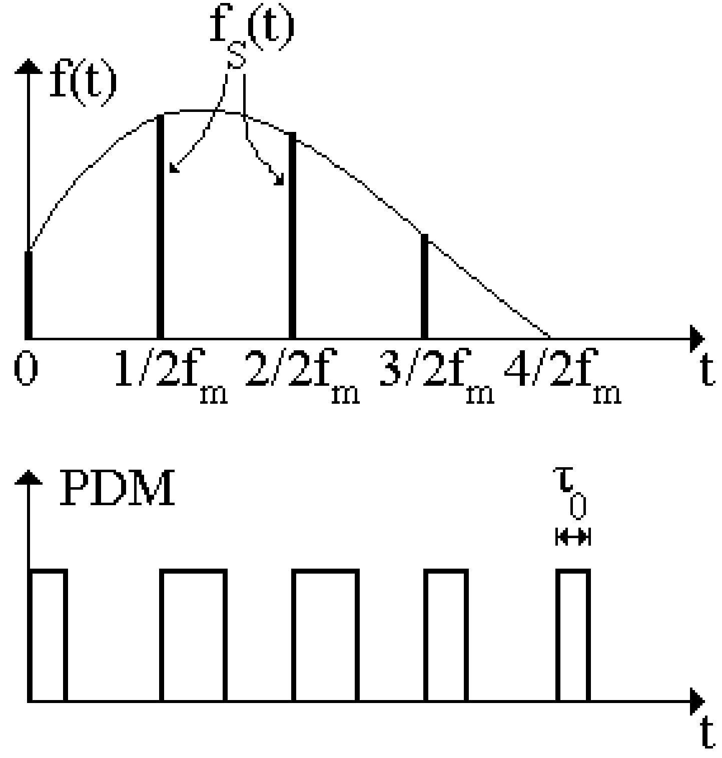
# ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- Πολύ σημαντική παράμετρος του συστήματος αποτελεί ο συγχρονισμός των δύο διακοπτών - ρολογιών S και S΄.
- Στο σύστημα TDM τα σήματα χρησιμοποιούν όλο το διαθέσιμο εύρος ζώνης για περιορισμένο χρονικό διάστημα, σε αντίθεση με την Πολυπλεξία στο Πεδίο της Συχνότητας (Frequency Division Multiplexing, FDM).



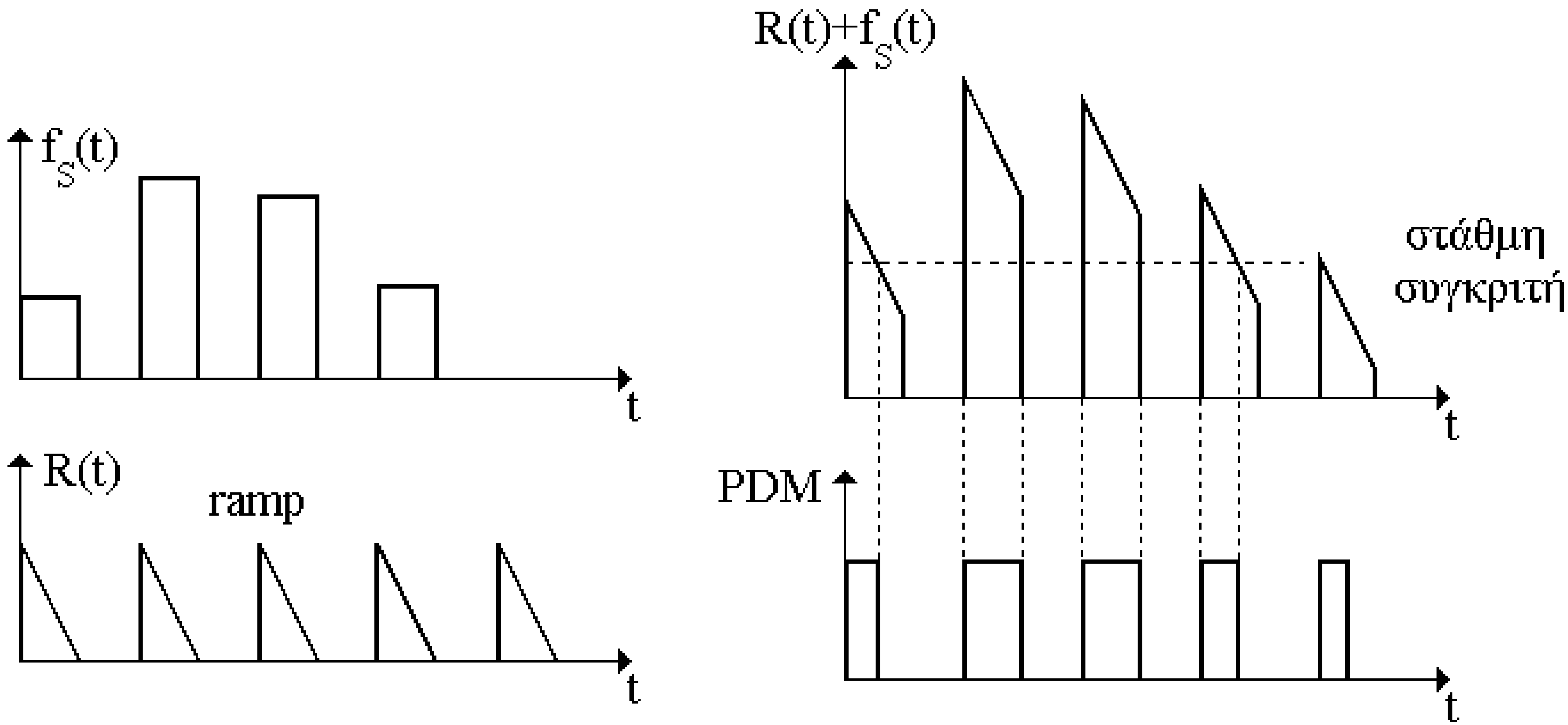
# ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ ΠΑΛΜΩΝ

- Η χρονική διάρκεια του κάθε παλμού της περιοδικής παλμοσειράς είναι ανάλογη με την τιμή του σήματος πληροφορίας κατά την χρονική στιγμή της δειγματοληψίας.
- Στα αγγλικά ονομάζεται Pulse Duration Modulation (PDM) ή Pulse Width Modulation (PWM).



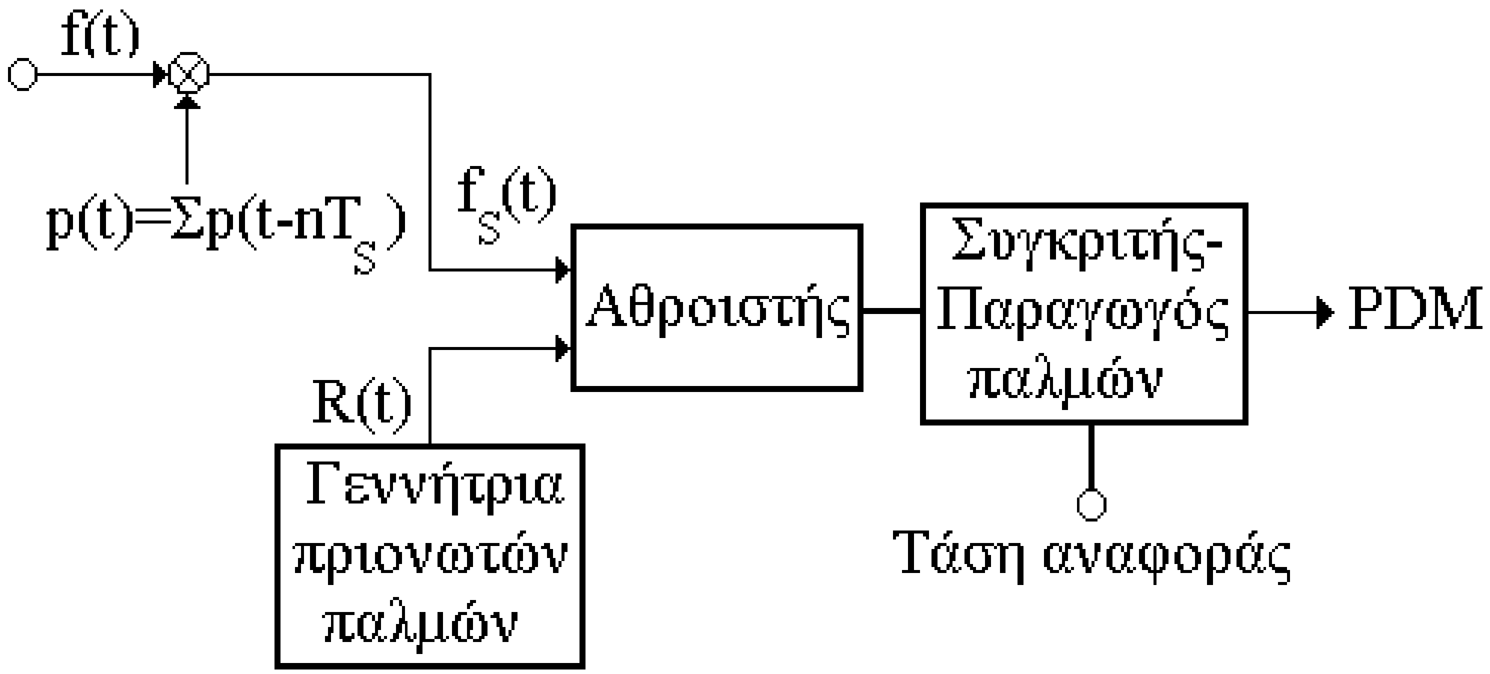
# ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ ΠΑΛΜΩΝ

- Διαδοχικά στάδια διαμόρφωσης διάρκειας παλμών



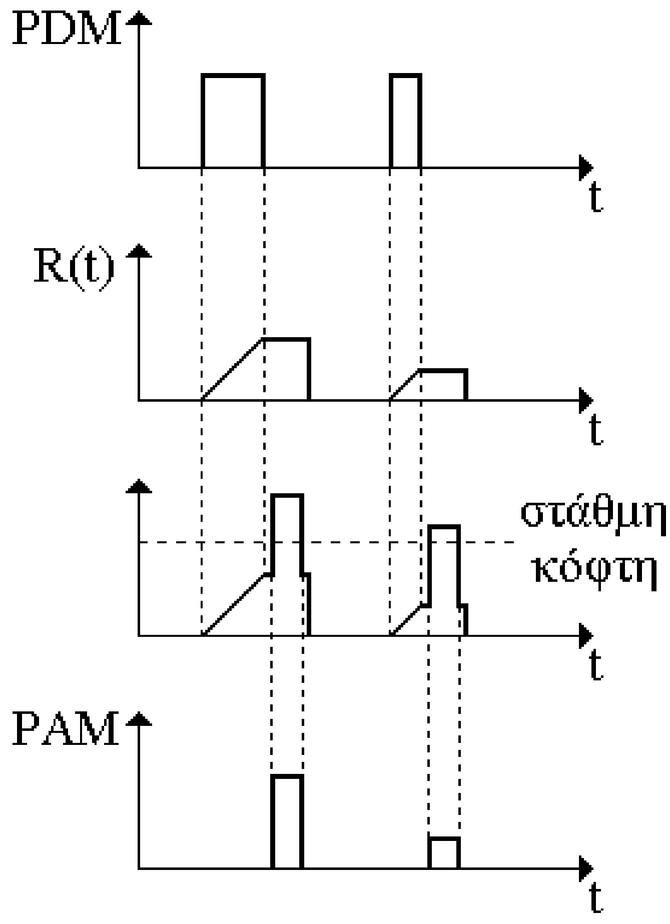
# ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ ΠΑΛΜΩΝ

- Block διάγραμμα διαμορφωτή διάρκειας παλμών



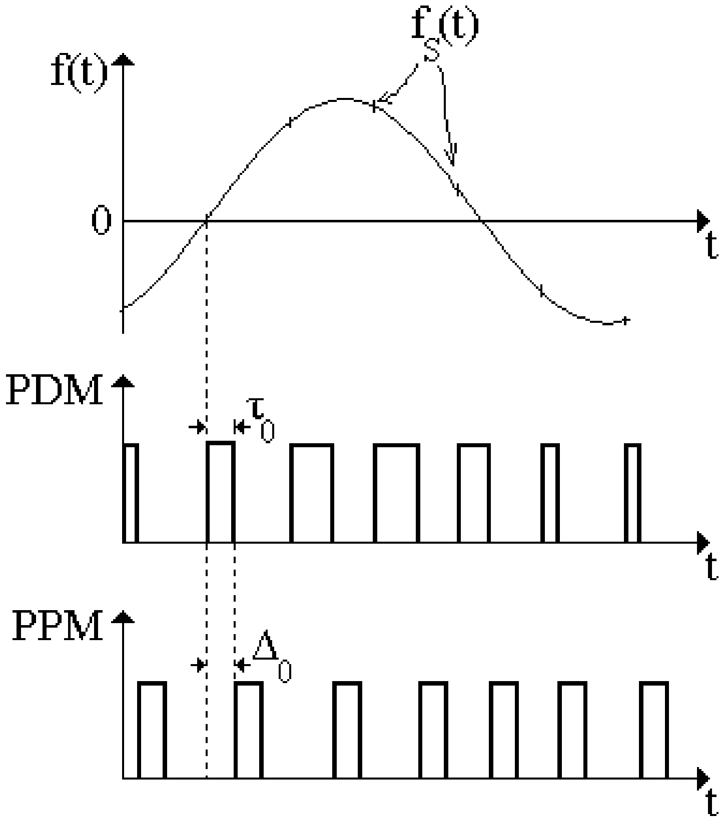
# ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ ΠΑΛΜΩΝ

- Διαδοχικά στάδια αποδιαμόρφωσης διάρκειας παλμών



# ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΘΕΣΗΣ ΠΑΛΜΩΝ

- Η χρονική θέση του κάθε παλμού της περιοδικής παλμοσειράς είναι ανάλογη με την τιμή του σήματος πληροφορίας κατά την χρονική στιγμή της δειγματοληψίας.
- Στα αγγλικά ονομάζεται Pulse Position Modulation (PPM).

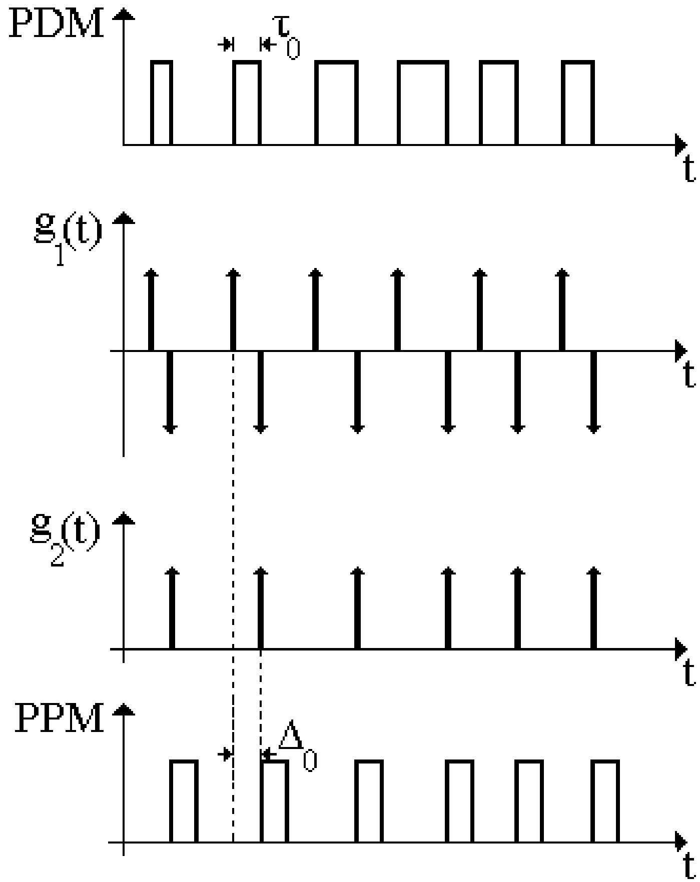


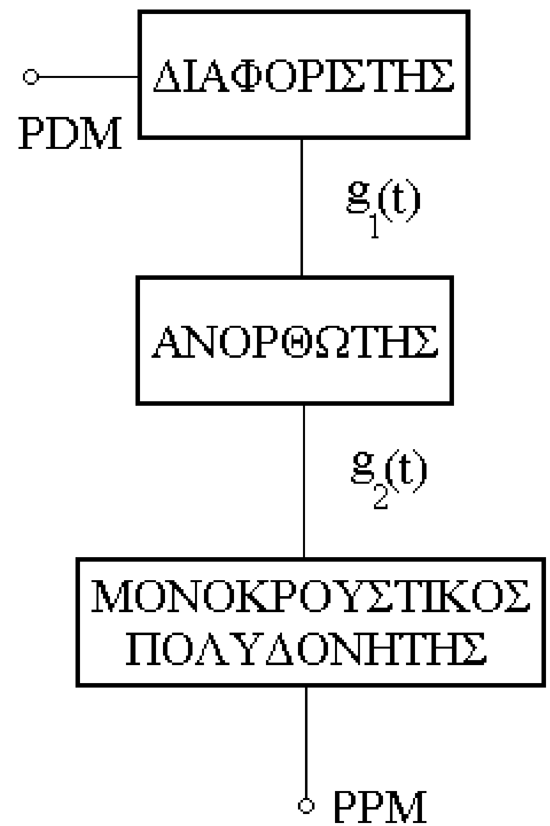
# ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΘΕΣΗΣ ΠΑΛΜΩΝ

- Όταν το σήμα *f*(*t*) είναι ίσο με μηδέν (δεύτερο δείγμα), τότε ο παλμός *p*(*t*) απέχει $\Delta_0$ μονάδες χρόνου από το σημείο του δείγματος.
- Όταν η τιμή του δείγματος είναι θετική, τότε η απόσταση αυξάνεται, ενώ στην αντίθετη περίπτωση μειώνεται.
- Η διαμόρφωση από τιμή πλάτους σε "θέση" γίνεται γραμμικά.
- Η παραγωγή του σήματος PPM γίνεται από το σήμα PDM, αφού το τελευταίο έχει την τιμή των δειγμάτων του *f*(*t*) στη "διάρκεια" των παλμών του και μάλιστα στο τέλος (κλείσιμο) των παλμών.

# ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΘΕΣΗΣ ΠΑΛΜΩΝ

- Διαδοχικά στάδια διαμόρφωσης και block διάγραμμα διαμορφωτή



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα 1kHz και πλάτος 1V πρόκειται να διαμορφωθεί κατά PPM με διακριτικότητα ±0.5mV. Η ελάχιστη διάρκεια των παλμών και η χρόνος ασφαλείας είναι 1μsec. Υπολογίστε το απαιτούμενο εύρος ζώνης $B$ για λόγο σήματος-προς-θόρυβο εισόδου 20dB. Δίνεται ότι για ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο ισχύει η σχέση

$$B \cong 1 \big/ (\Delta\tau \sqrt{S/N})$$

όπου $\Delta\tau$ είναι η ελάχιστη δυνατή χρονική ακρίβεια του συστήματος παρουσίας θορύβου.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

**Λύση**

Αφού $f_{\max}$=1kHz, $f_S$=2$f_{\max}$=2kHz, $T_S$=0.5msec≡500μsec.

Δίνεται $\tau_g$=$\tau_p$=1μsec, συνεπώς ο διαθέσιμος χρόνος για διαμόρφωση είναι: $\Delta T=T_S-\tau_p-\tau_g$=498μsec.

Η σταθερά διαμόρφωσης είναι: $k=\Delta T/\Delta V$=249μsec/V, όπου $V$=2V (διπλάσιο πλάτος του σήματος).

Η απαιτούμενη χρονική ακρίβεια είναι:

$\Delta\tau$ = $k$·(διακριτικότητα σήματος) = $k\cdot\Delta\alpha$ = 0.249μsec, όπου $\Delta\alpha$ = 1mV.

$$B=\frac{1}{\Delta\tau\sqrt{S/N}}=\frac{1}{0.249\times 10^{-3}\times 10}=402\text{ kHz}$$