

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΠΑΛΜΩΝ

6.1 Εισαγωγή

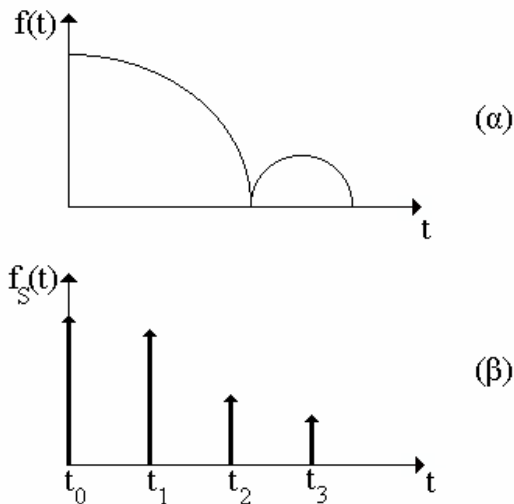
Τα συστήματα, που αναλύθηκαν μέχρι τώρα (*AM* και *FM*), χρησιμοποιούνται συνήθως στις περιπτώσεις, που το κανάλι είναι ασύρματο και η μετατόπιση του αρχικού φάσματος του σήματος πληροφορίας σε υψηλές συχνότητες είναι απαραίτητη. Όταν, όμως, το κανάλι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σήματα χαμηλών συχνοτήτων, π.χ. η ανθρώπινη φωνή, τότε είναι δυνατή η χρήση δύο άλλων κατηγοριών συστημάτων τηλεπικοινωνιών, από τις οποίες η πρώτη περιλαμβάνει τα **συστήματα διαμόρφωσης παλμών** (*Pulse Modulation*). Για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα τέτοιο σύστημα, το σήμα πρέπει να είναι **διακριτό** ως προς το χρόνο. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε το σήμα πρέπει να υποστεί δειγματοληψία. Πριν προχωρήσει η περιγραφή των συστημάτων αυτών, θα γίνει η παρουσίαση της Θεωρίας της Δειγματοληψίας και θα δοθούν τα σχετικά με αυτήν θεωρήματα.

6.2 Θεωρία Δειγματοληψίας

Σε προηγούμενα κεφάλαια εξετάστηκαν συστήματα τηλεπικοινωνιών, τα οποία χρησιμοποιούν αναλογικά σήματα. Όμως, στην πράξη πολύ συχνά συναντώνται διακριτά σήματα ή σήματα διακεκριμένου χρόνου, που στις περισσότερες περιπτώσεις προέρχονται από κάποιο αναλογικό σήμα, το οποίο έχει υποστεί δειγματοληψία. **Δειγματοληψία** (*Sampling*) λέγεται η διαδικασία κατά την οποία από ένα αναλογικό σήμα λαμβάνεται ένας πεπερασμένος αριθμός τιμών του (δείγματα). Για να γίνει κατανοητή η έννοια της δειγματοληψίας, στο Σχήμα 6.1α έχει σχεδιαστεί ένα αναλογικό σήμα και στο Σχήμα 6.1β το σήμα διακεκριμένου χρόνου, που προέρχεται από τη δειγματοληψία του αναλογικού σήματος στα σημεία t_0 , t_1 , t_2 και t_3 .

Η διαδικασία της δειγματοληψίας μπορεί να γίνει θεωρητικά με πολλαπλασιασμό του $f(t)$ μ' ένα τράινο ώσεων, που έχει τις ώσεις του στα σημεία t , που ενδιαφέρουν. Αυτή η δειγματοληψία λέγεται **ιδανική**. Βέβαια, στην πράξη τράινο ώσεων δεν υπάρχει και όπως θα γίνει φανερό παρακάτω η δειγματοληψία γίνεται πολλαπλασιάζοντας με

σειρά παλμών. Στις περισσότερες περιπτώσεις το σήμα $f_s(t)$ είναι ένα νέο σήμα και η μόνη συγγένεια, που έχει με το αρχικό $f(t)$, είναι ότι έχουν τις ίδιες τιμές στα σημεία δειγματοληψίας. Υπάρχουν, όμως, μερικές περιπτώσεις σημάτων για τα οποία το $f_s(t)$ διατηρεί στα λίγα δείγματα του όλα τα στοιχεία του $f(t)$ και μπορεί να ξαναδώσει το $f(t)$. Αυτό σημαίνει ότι αρκούν ορισμένα δείγματα ενός σήματος για να ληφθεί πλήρως η πληροφορία, την οποία είχε το συνολικό σήμα. Η οικονομία που γίνεται στον προσδιορισμό του σήματος είναι τεράστια.



Σχήμα 6.1. (α) Αναλογικό σήμα $f(t)$ και (β) σήμα διακεκριμένου χρόνου $f_s(t)$.

6.3 Θεώρημα Δειγματοληψίας (Shannon)

Έστω $f(t)$ ένα σήμα, που έχει συνιστώσες συχνότητας μέχρι τη συχνότητα ω_0 , ενώ για συχνότητες $|\omega| > \omega_0$ ο Μ/Σ *Fourier* του $f(t)$ μηδενίζεται. Τότε, οι τιμές του σήματος $f(t)$ τις χρονικές στιγμές $t = n\pi/\omega_0$, με $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, προσδιορίζουν πλήρως το σήμα $f(t)$. Επιπλέον, το $f(t)$ ξαναδημιουργείται από τις τιμές αυτές με τη σχέση:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \frac{\sin\left[\omega_0\left(t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right)\right]}{\omega_0\left(t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right)} \quad (6.1)$$

Απόδειξη

Ο Μ/Σ *Fourier* του $f(t)$ είναι:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6.2)$$

και εφόσον $F(\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_0$ έπεται ότι:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (6.3)$$

Είναι γνωστό ότι το σήμα $f(t)$ **προσδιορίζεται πλήρως** από το Μ/Σ *Fourier* $F(\omega)$. Όμως, το $F(\omega)$ είναι γενικά ένα μιγαδικό σήμα στο πεδίο συχνοτήτων ω περιορισμένο στο διάστημα $(-\omega_0, \omega_0)$ και μπορεί να επεκταθεί σε σειρά *Fourier* στο πεδίο ω . Αυτή η σειρά θα έχει τη μορφή:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp\left(in \frac{2\pi}{2\omega_0} \omega\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp(inx_0 \omega) \quad (6.4)$$

$$\text{όπου } x_0 = \pi/\omega_0 \quad (6.5)$$

ενώ οι συντελεστές *Fourier* F_n δίνονται από τη σχέση:

$$F_n = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega)e^{-jnx_0 \omega} d\omega \quad (6.6)$$

Είναι, επίσης, γνωστό ότι οι συντελεστές F_n **προσδιορίζουν** πλήρως το $F(\omega)$, και αφού το $F(\omega)$ κάνει το ίδιο για το σήμα $f(t)$, έπεται ότι οι συντελεστές F_n **προσδιορίζουν πλήρως το σήμα $f(t)$** . Τότε, η εξίσωση (6.3) για $t = -n\pi/\omega_0$ γράφεται:

$$\frac{\pi}{\omega_0} f\left(-\frac{n\pi}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega)e^{-j\frac{n\pi}{\omega_0}\omega} d\omega \quad (6.7)$$

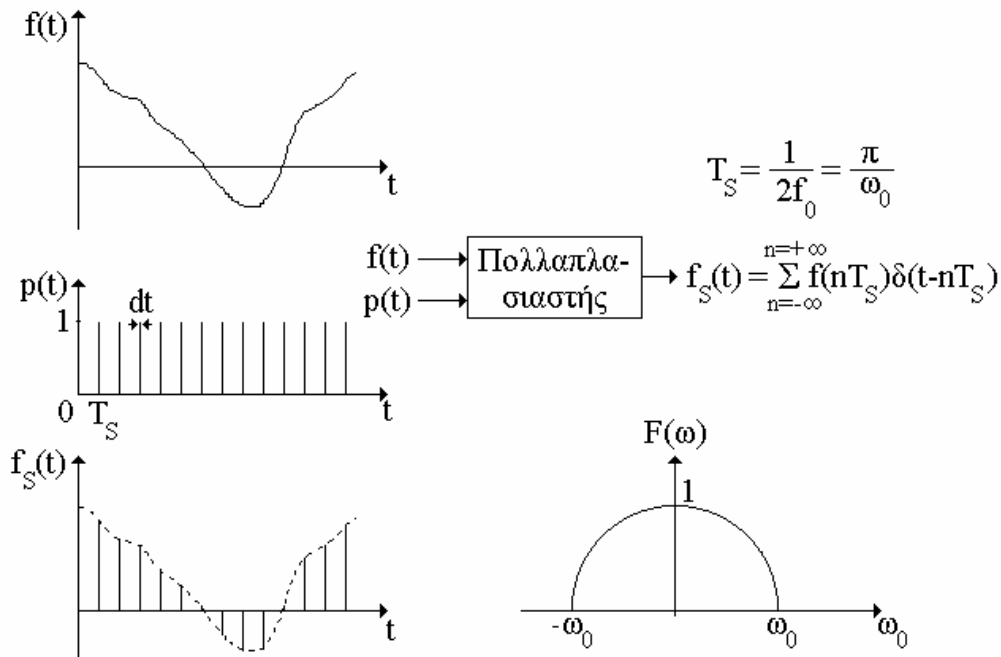
Από τις εξισώσεις (6.6) και (6.7) προκύπτει:

$$F_n = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \quad (6.8)$$

Από την τελευταία έπεται ότι οι τιμές του σήματος $f(t)$ στα σημεία $t = n\pi/\omega_0$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) **προσδιορίζουν πλήρως το σήμα $f(t)$** . Έτσι, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (6.4) και (6.8), η εξίσωση (6.3) γράφεται:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\pi x_0/\omega_0} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega(t+n\pi x_0/\omega_0)} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\omega_0} f\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega(t-\frac{n\pi}{\omega_0})} d\omega \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \frac{\sin \omega_0(t-\frac{n\pi}{\omega_0})}{\omega_0(t-\frac{n\pi}{\omega_0})}
 \end{aligned}$$

Έχοντας αποδείξει το Θεώρημα Δειγματοληψίας, στη συνέχεια θα παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η δειγματοληψία στην πράξη.



Σχήμα 6.2. (α) Θεωρητική Δειγματοληψία και (β) Μετασχηματισμός Fourier $F(\omega)$.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η δειγματοληψία θεωρητικά μπορεί να γίνει με πολλαπλασιασμό του σήματος $f(t)$ με ένα περιοδικό σήμα συναρτήσεων δέλτα, όπως

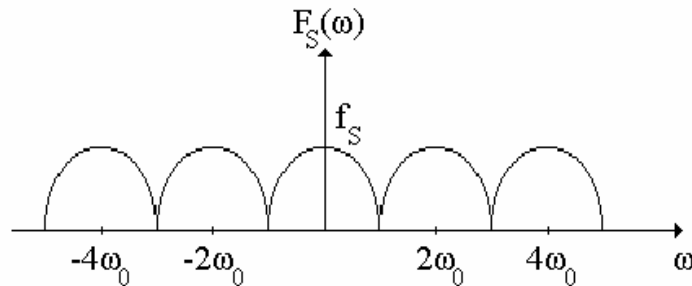
φαίνεται στο Σχήμα 6.2. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι μια συνάρτηση $f_S(t)$, που έχει τις τιμές του $f(t)$ στα σημεία $t = n\pi/\omega_0$. Έστω, ότι ο Μ/Σ *Fourier* του $f(t)$ έχει τη μορφή του Σχήματος 6.2β. Τότε, ο Μ/Σ *Fourier* της $f_S(t) = f(t) \cdot p(t)$ δίνεται με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του Μ/Σ *Fourier*. Συγκεκριμένα:

$$f_S(t) = f(t)p(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \frac{n\pi}{\omega_0}) \quad (6.9)$$

και ο Μ/Σ *Fourier* της $f_S(t)$ δίνεται από τη γνωστή ιδιότητα του Μ/Σ *Fourier*, σύμφωνα με την οποία ο Μ/Σ *Fourier* ενός γινομένου σημάτων ισούται με τη συνέλιξη των Μ/Σ *Fourier* των σημάτων. Άρα:

$$\begin{aligned} F_S(\omega) &= \mathfrak{F}[f_S(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \frac{2\pi}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2n\omega_0) \\ &= \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - 2n\omega_0) = f_S \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - 2n\omega_0) \end{aligned} \quad (6.10)$$

του οποίου η γραφική παράσταση στο πεδίο ω δίνεται στο Σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3. Ο Μετασχηματισμός *Fourier* της $f_S(t)$.

Το Σχήμα 6.3 περιέχει την ουσία του Θεωρήματος του *Shannon*. Όπως είναι γνωστό το $f(t)$ προσδιορίζεται εντελώς από το $F(\omega)$. Αλλά, το $F_S(\omega)$ έχει το $F(\omega)$ χωρίς καμία αλλαγή της μορφής του, και όχι μόνο το έχει ακριβώς όπως και το Σχήμα 6.2β, δηλαδή γύρω από το $\omega = 0$, αλλά το έχει και μετατοπισμένο στα σημεία $\omega = \pm 2\omega_0, \pm 4\omega_0, \dots$ Πραγματικά λοιπόν, η δειγματοληψία του *Shannon* δεν έχασε καμία πληροφορία, που είχε το $f(t)$, γιατί υπάρχουν φίλτρα που μπορούν να αφαιρέσουν όλα, εκτός από το $F(\omega)$, και να μας ξαναδώσουν το αρχικό μας σήμα $f(t)$. Όταν τα δείγματα της $f(t)$ ληφθούν πιο

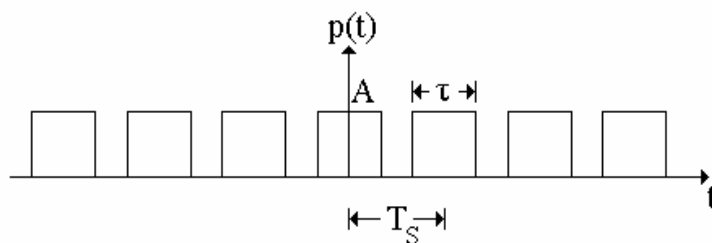
συχνά από π/ω_0 , τότε η απόσταση μεταξύ των μετατοπισμένων $F(\omega)$ θα είναι μεγαλύτερη και, επομένως, η επανάκτησή του $f(t)$ πιο εύκολη. Αντίθετα, αν τα δείγματα ληφθούν πιο αργά από π/ω_0 , τότε τα μετατοπισμένα $F(\omega)$ θα επικαλύπτονται, με συνέπεια η επανάκτηση του $f(t)$ να είναι δύσκολη. Το φαινόμενο αυτό λέγεται **αλλοίωση**.

Το συμπέρασμα, λοιπόν, είναι ότι οι αποστάσεις των δειγμάτων πρέπει να είναι το πολύ π/ω_0 . Η απόσταση π/ω_0 λέγεται **περίοδος δειγματοληψίας**, ενώ η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας λέγεται **ρυθμός δειγματοληψίας** ή **ρυθμός του Nyquist** ($f_{S\min} = 2f_0$). Τα αποτελέσματα του θεωρήματος είναι φυσικά θεωρητικά. Στην πράξη υπάρχουν δύο προβλήματα:

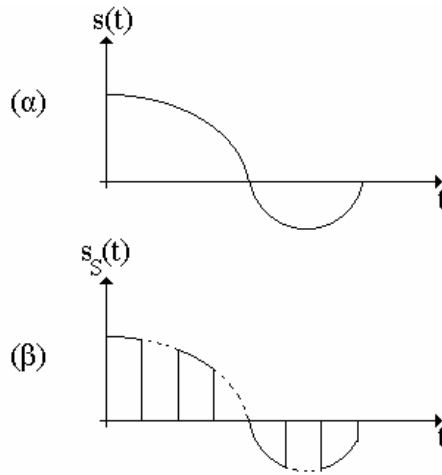
- α) Δεν υπάρχει σήμα, που να είναι σήμα περιορισμένης ζώνης (δηλαδή $F(\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_0$). Όμως, υπάρχουν σήματα, για τα οποία μπορεί να βρεθεί συχνότητα ω_0 , έτσι ώστε η ισχύς ή η ενέργεια του ως το σημείο ω_0 να είναι τουλάχιστον το 95% της συνολικής της τιμής.
- β) Δεν υπάρχει συνάρτηση δέλτα ούτε τραίνο ώσεων (χτένα).

6.4 Φυσική Δειγματοληψία

Στην πράξη η δειγματοληψία μπορεί να γίνει με χρήση ενός περιοδικού παλμού $p(t)$, του οποίου η ιδανική μορφή φαίνεται στο Σχήμα 6.4. Έστω, επίσης, ότι ένα σήμα πληροφορίας $s(t)$ περιορισμένου εύρου ζώνης (ω_0), όπως αυτό του Σχήματος 6.5α, που πολλαπλασιάζεται με τον περιοδικό παλμό του Σχήματος 6.4, οπότε προκύπτει το δειγματοληπτημένο σήμα του Σχήματος 6.5β.



Σχήμα 6.4. Περιοδικός παλμός $p(t)$, διάρκειας τ , πλάτους A και περιόδου T_S .



Σχήμα 6.5. (α) Το πληροφοριακό σήμα $s(t)$ και (β) το αποτέλεσμα της φυσικής δειγματοληψίας αυτού.

Φυσικά, η περίοδος του παλμού υπακούει στο θεώρημα του *Shannon*, δηλαδή:

$$T_S = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{1}{2f_0} \quad (6.11)$$

Επειδή το $p(t)$ είναι ένα περιοδικό σήμα, αυτό μπορεί να επεκταθεί σε σειρά *Fourier*, επομένως, γράφεται:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n e^{jn\omega_s t} \quad (6.12)$$

όπου οι συντελεστές P_n δίνονται από τη σχέση:

$$P_n = \frac{1}{T_S} \int_{-T_S/2}^{T_S/2} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{A\tau}{T_S} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) = \frac{A\tau}{T_S} \text{Sa}(n\omega_0 \tau) \quad (6.13)$$

$$\text{και φυσικά } \omega_s = \frac{2\pi}{T_S} = \frac{2\pi\omega_0}{\pi} = 2\omega_0 \quad (6.14)$$

Τότε, το $s_S(t)$ γράφεται:

$$s_S(t) = s(t)p(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n e^{j2n\omega_0 t} \quad (6.15)$$

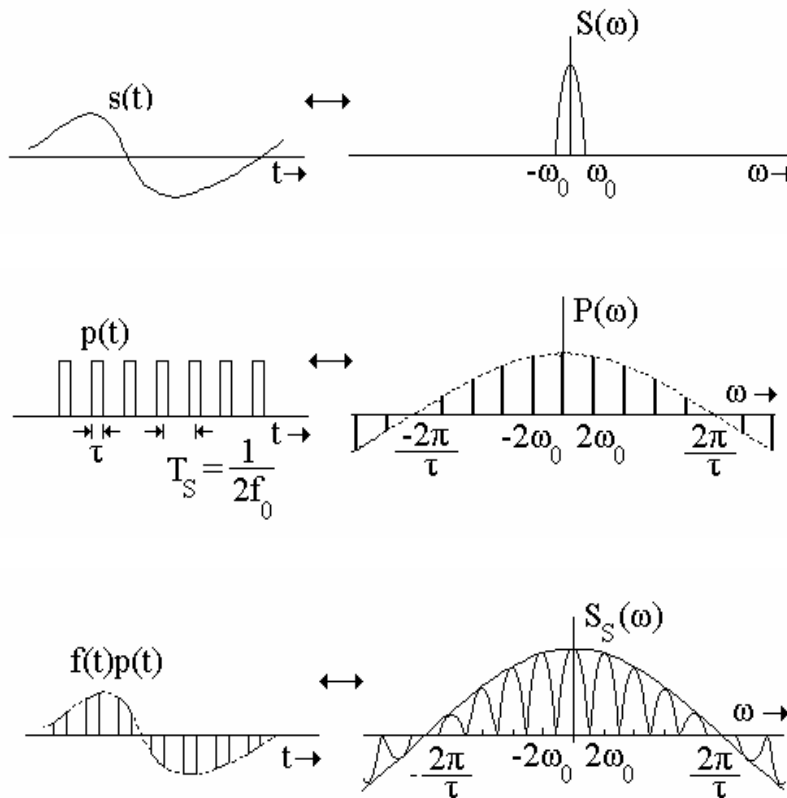
και ο Μ/Σ *Fourier* αυτού είναι:

$$S_S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n e^{j2n\omega_0 t} e^{-j\omega t} \right] dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{j2n\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \quad (6.16)$$

Αφού ληφθεί υπόψη ότι το ολοκλήρωμα της τελευταίας ισότητας αποτελεί το Μ/Σ *Fourier* του σήματος $s(t)e^{j2n\omega_0 t}$, η εξίσωση (6.16) γράφεται με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του Μ/Σ *Fourier* :

$$S_S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n S(\omega - 2n\omega_0) \quad (6.17)$$

Η εξίσωση (6.17) δίνει το αποτέλεσμα της **φυσικής δειγματοληψίας** στο πεδίο της συχνότητας, κατά την οποία γίνεται η ίδια μετατόπιση του $S(\omega)$ με την ιδανική δειγματοληψία, με τη **διαφορά** ότι κάθε μετατοπισμένο $S(\omega)$ πολλαπλασιάζεται με τον αντίστοιχο συντελεστή *Fourier* P_n του περιοδικού παλμού. Στο Σχήμα 6.6 δίνεται η φυσική δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας.

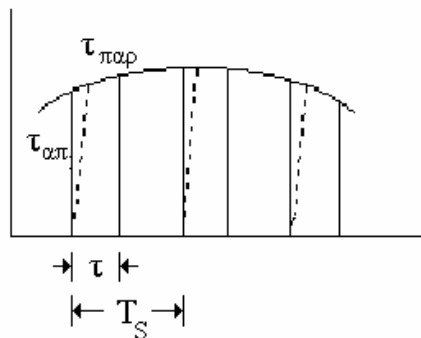


Σχήμα 6.6. Φυσική Δειγματοληψία (α) στο πεδίο του χρόνου και (β) στο πεδίο της συχνότητας.

Γενικά, η διάρκεια τ των παλμών, οι οποίοι χρησιμοποιούνται στα σήματα δειγματοληψίας, λέγεται **χρόνος ανοίγματος** και όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.7, περιλαμβάνει το **χρόνο απόκρισης** της τιμής $\tau_{\alpha\pi}$ και το **χρόνο παρακολούθησης** $\tau_{\text{παρ}}$ ($= \tau_{\alpha\pi} + \tau_{\text{παρ}}$). Αν ως **κύκλος δραστηριότητας** d του κάθε παλμού οριστεί το πηλίκο $d = \tau/T_0$, τότε, οι συντελεστές P_n της εξίσωσης (6.13) ικανοποιούν τη σχέση:

$$P_0 = d \cdot A \text{ και } P_0 > P_{|1|} > P_{|2|} > \dots \quad (6.18)$$

δηλαδή το πλάτος της κάθε αρμονικής συνιστώσας του φάσματος του σήματος δειγματοληψίας $p(t)$ μειώνεται με την αύξηση της τάξης της αρμονικής n . Τα πλάτη αυτά είναι μικρότερα από εκείνα του σήματος κατά την ιδανική δειγματοληψία, οπότε η χρήση περιοδικών παλμών για τη δειγματοληψία ενός σήματος στην πράξη πλεονεκτεί ως προς την αποτελεσματικότητα της δράσης του χαμηλοπερατού φίλτρου κατά την ανασύσταση του αρχικού σήματος, αφού αυτό θα πρέπει να μηδενίσει τα ήδη μειωμένα πλάτη των αρμονικών του φάσματος των δειγμάτων. Τέλος, το αρχικό σήμα μετά την ανασύσταση του θα είναι πολλαπλασιασμένο επί ένα συντελεστή ίσο προς τον κύκλο δραστηριότητας d των παλμών, οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν για τη δειγματοληψία του.



Σχήμα 6.7. Χρόνοι ανοίγματος και παρακολούθησης στη Φυσική Δειγματοληψία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το σήμα $f(t) = \cos(3\pi t) + 0.125\cos(8\pi t)$ δειγματοληπτείται περιοδικά κάθε T_S δευτερόλεπτα.
 - α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της περιόδου δειγματοληψίας T_S καθώς και η ελάχιστη τιμή του ρυθμού δειγματοληψίας.

β) Αν το σήμα δειγματοληψίας δίνεται από τη σχέση $s(t)=4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-0.125n)$, τότε

το δειγματοληπτημένο σήμα δίνεται από τη σχέση: $f_S(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n \delta(t-0.125n)$.

Να βρεθούν οι συντελεστές I_0, I_1, I_2 και δείξτε ότι $I_{n+16} = I_n$.

γ) Καθορίστε το εύρος ζώνης ενός χαμηλοπερατού φίλτρου, έτσι ώστε να είναι δυνατή η επανάκτηση του σήματος $f(t)$ χωρίς παραμόρφωση.

Απάντηση

α) Από το θεώρημα Δειγματοληψίας είναι γνωστό ότι:

$$T_S = \frac{1}{2f_{0(\max)}} = \frac{\pi}{\omega_{0(\max)}} = \frac{\pi}{8\pi} = 0.125 \text{ sec και } f_S = 1/T_S = 8 \text{ Hz.}$$

β) $f_S(t) = f(t)s(t) = [\cos(3\pi t) + 0.125\cos(8\pi t)] 4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-0.125n)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4[\cos(3\pi t) + 0.125\cos(8\pi t)] \delta(t-0.125n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4[\cos(3\pi \cdot 0.125n) + 0.125\cos(8\pi \cdot 0.125n)] \delta(t-0.125n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n \delta(t-0.125n)$$

όπου $I_n = 4[\cos(0.375n\pi) + 0.125\cos(n\pi)]$.

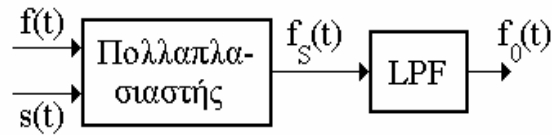
Τότε:

$$I_0 = 4(1+0.125) = 4.5, \quad I_1 = 4(0.383-0.125) = 1.032, \quad I_2 = 4(-0.707+0.125) = -0.328$$

$$\text{και } I_{n+16} = 4[\cos(0.375n\pi+6\pi) + 0.125\cos(n\pi+16\pi)] = I_n$$

γ) Επειδή $f_{0(\max)} = 4 \text{ Hz} \Rightarrow B_{LPF} = 4 \text{ Hz}$.

2. Έστω ότι το τράινο ώσεων $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$ χρησιμοποιείται για τη δειγματοληψία του σήματος $f(t) = \cos(11\omega_1 t) + \cos(12\omega_1 t) + \cos(13\omega_1 t)$ και γίνεται μέσω ενός πολλαπλασιαστή, όπως φαίνεται στο σχήμα:

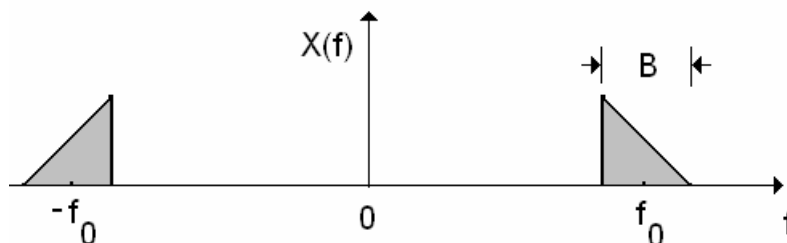


- Υπολογίστε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας.
- Προσδιορίστε την έκφραση του $f_s(t)$.
- Προσδιορίστε την έκφραση του σήματος εξόδου $f_0(t)$, αν το εύρος ζώνης του βαθυπερατού φίλτρου είναι $BW = 2f_1$ ή $BW = 4f_1$.

Απάντηση

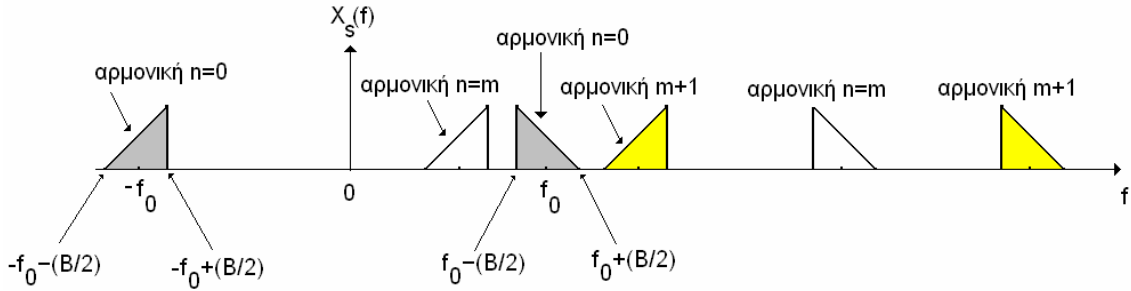
Για την επίλυση του προβλήματος πρέπει αρχικά να δοθεί το γενικευμένο θεώρημα δειγματοληψίας. Μέχρι τώρα το αναλογικό σήμα είχε συχνότητες από $f = 0$ μέχρι μία μέγιστη f_{\max} . Στη γενικότερη περίπτωση, όπου το φάσμα του σήματος είναι περιορισμένο σε μία ζώνη εύρους ζώνης B γύρω από μια κεντρική συχνότητα f_0 , τότε όπως θα δείξουμε παρακάτω η συχνότητα δειγματοληψίας δεν είναι απαραίτητο να είναι ίση με την διπλάσια της μέγιστης συχνότητας του σήματος.

Έστω λοιπόν ότι το φάσμα του σήματος $x(t)$ είναι μη μηδενικό στην περιοχή συχνοτήτων $f_0 - (B/2) \leq |f| \leq f_0 + (B/2)$ και μηδέν εκτός του διαστήματος αυτού, με $f_0 \geq B/2$ (Σχήμα Α).



Σχήμα Α: Φάσμα ζωνοπερατού σήματος με κεντρική συχνότητα f_0 και εύρος ζώνης B .

Είναι γνωστό από το Θεώρημα δειγματοληψίας για ένα σήμα χαμηλού αρμονικού περιεχομένου ότι για να είναι δυνατή η ανάκτηση του αρχικού σήματος από το δειγματοληπτημένο, θα πρέπει οι διάφορες αρμονικές να μην επικαλύπτονται μεταξύ τους. Ας δηλώσουμε με τους δείκτες m και $m + 1$ τις αρμονικές τις πιο κοντινές στη βασική αρμονική $n = 0$. Οι δύο αυτές αρμονικές προέρχονται μετά από μετατόπιση προς τα δεξιά της βασικής κατά mf_s και $(m + 1)f_s$, αντίστοιχα (Σχήμα Β).



Σχήμα Β: Φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος.

Επομένως, για να μην έχουμε επικάλυψη θα πρέπει να μην επικαλύπτονται οι ζώνες.

Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$mf_s - f_0 + \frac{B}{2} \leq f_0 - \frac{B}{2}, \quad (m+1)f_s - f_0 - \frac{B}{2} \geq f_0 + \frac{B}{2}, \quad f_s \geq B$$

Οι δύο πρώτες γράφονται στη μορφή:

$$mf_s \leq 2f_0 - B, \quad (m+1)f_s \geq 2f_0 + B$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{2f_0 + B}{m+1} \leq f_s \leq \frac{2f_0 - B}{m}$$

δηλαδή, οι συχνότητες δειγματοληψίας θα πρέπει να ικανοποιούν την τελευταία εξίσωση για να μην υπάρχει επικάλυψη αρμονικών. Οι κατάλληλες συχνότητες δειγματοληψίας f_s θα πρέπει να πληρούν την παραπάνω ανισότητα για μια ακέραια τιμή του m . Για τις διάφορες τιμές του m προκύπτει:

$m=0$	$2f_0 + B \leq f_s \leq \infty$
$m=1$	$\frac{2f_0 + B}{2} \leq f_s \leq 2f_0 - B$
$m=2$	$\frac{2f_0 + B}{3} \leq f_s \leq \frac{2f_0 - B}{2}$
$m=3$	$\frac{2f_0 + B}{4} \leq f_s \leq \frac{2f_0 - B}{3}$

Το βολικότερο διάστημα τιμών της f_s είναι αυτό για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$\frac{2f_0 + B}{M + 1} \leq f_s \leq \frac{2f_0 - B}{M}$$

για τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του ακεραίου M , ή ισοδύναμα ο μεγαλύτερος ακέραιος M , για τον οποίο ισχύει η παραπάνω ανισότητα, δίνεται από τη σχέση:

$$M \leq \frac{f_0}{B} - \frac{1}{2}, \text{ δηλαδή } M = \left[\frac{f_0}{B} - \frac{1}{2} \right]$$

όπου ο τελεστής $[\]$ δηλώνει το ακέραιο μέρος του περιεχομένου του. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το ευνοϊκότερο διάστημα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{2f_0 + B}{\left[\frac{f_0}{B} - \frac{1}{2} \right] + 1} \leq f_s \leq \frac{2f_0 - B}{\left[\frac{f_0}{B} - \frac{1}{2} \right]}$$

και επομένως η βολικότερη τιμή για τη συχνότητα δειγματοληψίας είναι:

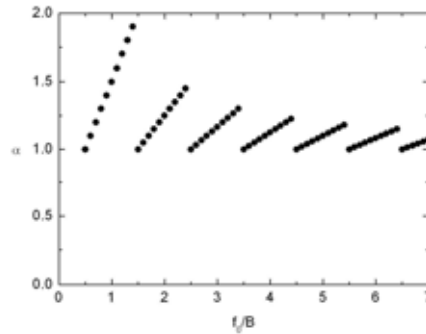
$$f_{s,\min} = \frac{2f_0 + B}{\left[\frac{f_0}{B} - \frac{1}{2} \right] + 1} = \frac{2f_0 + B}{\left[\frac{f_0}{B} + \frac{1}{2} \right]} = 2B \frac{\left(\frac{f_0}{B} + \frac{1}{2} \right)}{\left[\frac{f_0}{B} + \frac{1}{2} \right]} = 2Ba$$

όπου η τιμή της παραμέτρου a δίνεται από τη σχέση:

$$a = \frac{\left(\frac{f_0}{B} + \frac{1}{2} \right)}{\left[\frac{f_0}{B} + \frac{1}{2} \right]}$$

με τιμές στο διάστημα $1 \leq \alpha \leq 2$ (Σχήμα Γ).

Δηλαδή στη γενική περίπτωση η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας θα είναι ίση με $2B$, μόνο αν η ποσότητα $\left(\frac{f_0}{B} + \frac{1}{2}\right)$ είναι ακέραιος αριθμός. Διαφορετικά, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας θα κυμαίνεται μεταξύ $2B$ και $4B$.



Σχήμα Γ: Τρόπος μεταβολής της τιμής της παραμέτρου α ως συνάρτηση του f_0/B .

α) Όταν ο Μ/Σ *Fourier* ενός σήματος είναι μη μηδενικός σε μια περιοχή συχνοτήτων (f_L, f_H) , τότε η δειγματοληψία του σήματος αυτού μπορεί να γίνει με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 2Ba$, όπου $B = 2f_1$, $f_0 = 12f_1$ και $\alpha = 6.5/[6.5] \approx 1.083$. Επομένως, $f_s = 4.333f_1$.

β) Το σήμα δειγματοληψίας $s(t)$ μπορεί ν' αναλυθεί σε σειρά *Fourier*:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn\omega_s t}, \text{ όπου } S_n = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} s(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}.$$

Τότε:

$$s(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_s t} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\cos(n\omega_s t) + j\sin(n\omega_s t)] = \frac{1}{T_s} + \frac{2}{T_s} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\omega_s t)$$

όπου $\omega_s = 2\pi/T_s = 2\pi f_s$ και το δειγματοληπτημένο σήμα $f_s(t)$ γράφεται:

$$f_s(t) = f(t)s(t) = [\cos(11\omega_1 t) + \cos(12\omega_1 t) + \cos(13\omega_1 t)] \frac{1}{T_s} [1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\omega_s t)]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T_S} [\cos(11\omega_1 t) + \cos(12\omega_1 t) + \cos(13\omega_1 t)] \\
&+ \frac{2}{T_S} \sum_{n=1}^{+\infty} [\cos(11\omega_1 t) + \cos(12\omega_1 t) + \cos(13\omega_1 t)] \cos(n\omega_s t) \\
&= \frac{1}{T_S} [\cos(11\omega_1 t) + \cos(12\omega_1 t) + \cos(13\omega_1 t)] \\
&+ \frac{1}{T_S} \sum_{n=1}^{+\infty} \{ \cos[(11\omega_1 + n\omega_s)t] + \cos[(11\omega_1 - n\omega_s)t] \\
&\quad + \cos[(12\omega_1 + n\omega_s)t] + \cos[(12\omega_1 - n\omega_s)t] \\
&\quad + \cos[(13\omega_1 + n\omega_s)t] + \cos[(13\omega_1 - n\omega_s)t] \}
\end{aligned}$$

Θέτοντας $\omega_s = 4.333\omega_1$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\begin{aligned}
f_S(t) &= \frac{1}{T_S} [\cos(11\omega_1 t) + \cos(12\omega_1 t) + \cos(13\omega_1 t)] \\
&+ \frac{1}{T_S} \sum_{n=1}^{+\infty} \{ \cos[(11\omega_1 + 4.333n\omega_1)t] + \cos[(11\omega_1 - 4.333n\omega_1)t] \\
&\quad + \cos[(12\omega_1 + 4.333n\omega_1)t] + \cos[(12\omega_1 - 4.333n\omega_1)t] \\
&\quad + \cos[(13\omega_1 + 4.333n\omega_1)t] + \cos[(13\omega_1 - 4.333n\omega_1)t] \}
\end{aligned}$$

γ) Από την έκφραση της $f_S(t)$ προκύπτει ότι οι συχνότητες των πέντε πρώτων αρμονικών αυτής είναι:

$n=0$	$11\omega_1, 12\omega_1, 13\omega_1$	$n=3$	$23.999\omega_1, -1.999\omega_1,$ $24.999\omega_1, -0.999\omega_1,$ $25.999\omega_1, 0.001\omega_1$
$n=1$	$15.333\omega_1, 6.667\omega_1,$ $16.333\omega_1, 7.667\omega_1,$ $17.333\omega_1, 8.667\omega_1$	$n=4$	$28.332\omega_1, -6.332\omega_1,$ $29.332\omega_1, -5.332\omega_1,$ $30.332\omega_1, -4.332\omega_1$

$n=2$	$19.666\omega_1, 2.334\omega_1,$ $20.666\omega_1, 3.334\omega_1,$ $21.666\omega_1, 4.334\omega_1$	$n=5$	$32.665\omega_1, -10.665\omega_1,$ $33.665\omega_1, -9.665\omega_1,$ $34.665\omega_1, -8.665\omega_1$
-------	---	-------	---

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η συνάρτηση $f_o(t)$ είναι:

i) $BW = 2f_1$

$$f_o(t) = \frac{A}{T_s} \{ \cos[0.001\omega_1 t] + \cos[0.999\omega_1 t] + \cos[1.999\omega_1 t] \}$$

όπου A είναι η ενίσχυση ή η εξασθένηση του χαμηλοπερατού φίλτρου.

ii) $BW = 4f_1$

$$f_o(t) = \frac{A}{T_s} \{ \cos[0.001\omega_1 t] + \cos[0.999\omega_1 t] + \cos[1.999\omega_1 t] + \cos[2.334\omega_1 t] + \cos[3.334\omega_1 t] \}$$

3. Για τα παρακάτω σήματα να βρείτε το ρυθμό *Nyquist* και την περίοδο δειγματοληψίας α) $Sa(200t)$ και β) $[Sa(200t)]^2$.

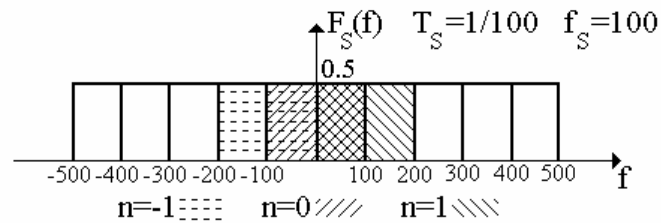
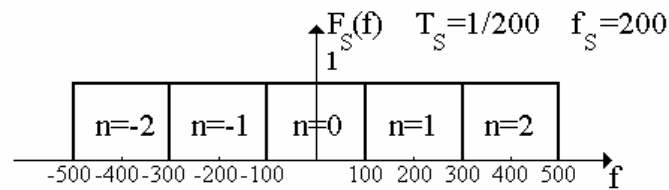
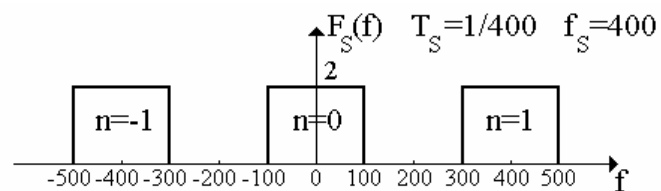
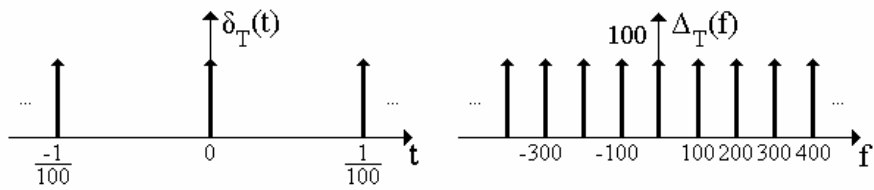
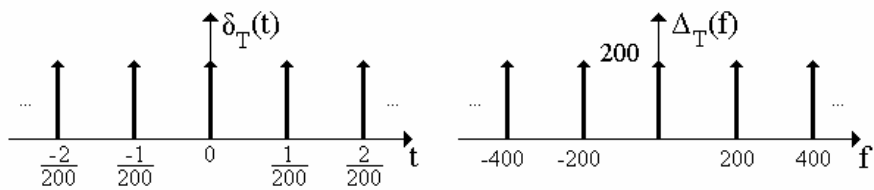
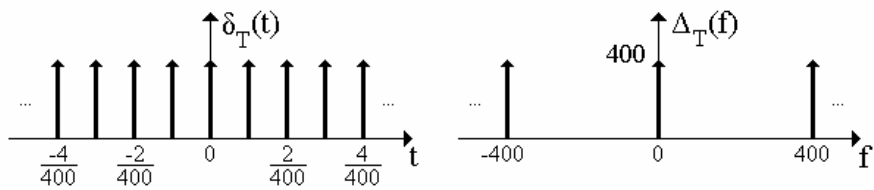
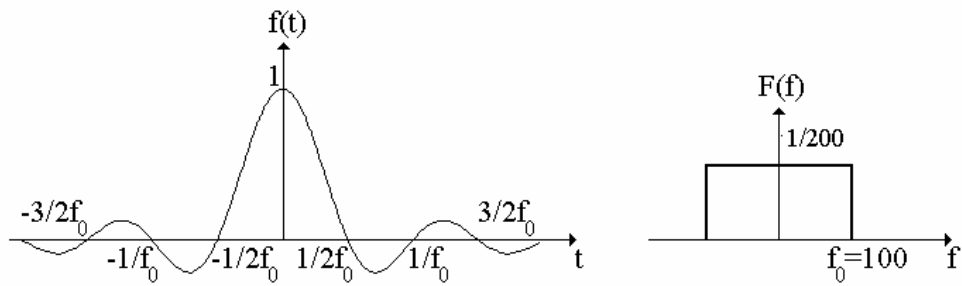
Απάντηση

α) $\omega_{0(\max)} = 200 \text{ rad/sec} \Rightarrow f_{0(\max)} = 100/\pi \text{ Hz} \Rightarrow T_s = \pi/200 \text{ sec}$ και $f_s = 200/\pi \text{ Hz}$.

β) $Sa^2(x) = (\sin x/x)^2 = (1 - \cos(2x))/2x^2 \Rightarrow \omega_{0(\max)} = 2 \cdot 200 = 400 \text{ rad/sec} \Rightarrow f_{0(\max)} = 200/\pi \text{ Hz} \Rightarrow T_s = \pi/400 \text{ sec}$ και $f_s = 400/\pi \text{ Hz}$.

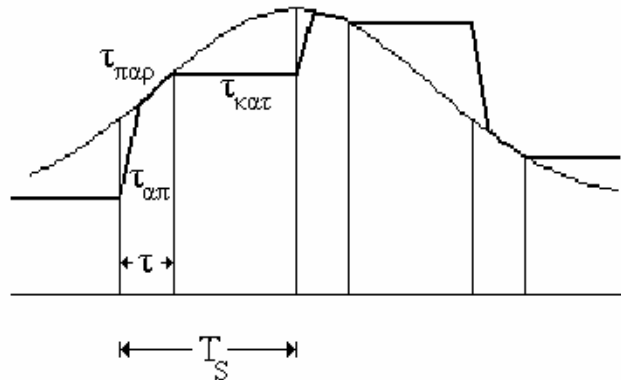
4. Έστω η συνάρτηση $f(t) = Sa(200\pi t)$. Να σχεδιαστεί η $f(t)$ και η $F(f)$. Στη συνέχεια, ένα τραίνο ώσεων $\delta_T(t)$ χρησιμοποιείται για τη δειγματοληψία της $f(t)$. Να σχεδιαστεί το φάσμα της $\delta_T(t)$ και της $f(t)\delta_T(t)$ για $T = 1/400, 1/200,$ και $1/100$.

Απάντηση



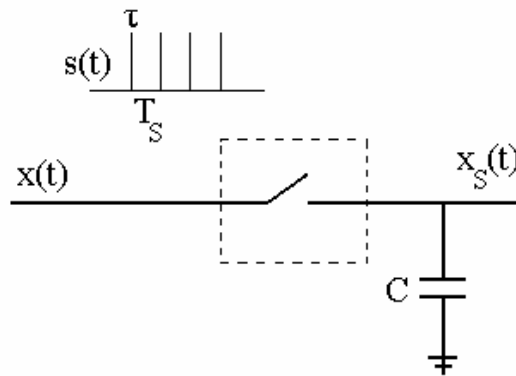
6.5 Δειγματοληψία & Κατακράτηση (*Sampling and Holding*)

Σε πολλές εφαρμογές η πράξη της δειγματοληψίας αποτελεί την πρώτη από μια σειρά διαδικασιών επεξεργασίας των δειγμάτων του σήματος σε διακριτή ή ψηφιακή μορφή. Σε τέτοιες περιπτώσεις απαιτείται η τιμή του πλάτους του κάθε δείγματος να παραμένει σταθερή καθόλη τη διάρκεια της επεξεργασίας του. Δηλαδή, αν η διάρκεια των παλμών του σήματος δειγματοληψίας είναι τ , τότε η τιμή του δείγματος στο τέλος του χρόνου παρακολούθησης διατηρείται σταθερή μέχρι τον επόμενο παλμό δειγματοληψίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.8. Το χρονικό διάστημα T_S - τ ονομάζεται **χρόνος κατακράτησης**.



Σχήμα 6.8. Δειγματοληψία και κατακράτηση.

Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως **Δειγματοληψία και Κατακράτηση** και πραγματοποιείται με μια απλή διάταξη δειγματοληψίας, στην έξοδο της οποίας υπάρχει ως στοιχείο "αποθήκευσης" (κατακράτησης) του πλάτους κάθε δείγματος ένας πυκνωτής κατάλληλης χωρητικότητας C , όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.9.

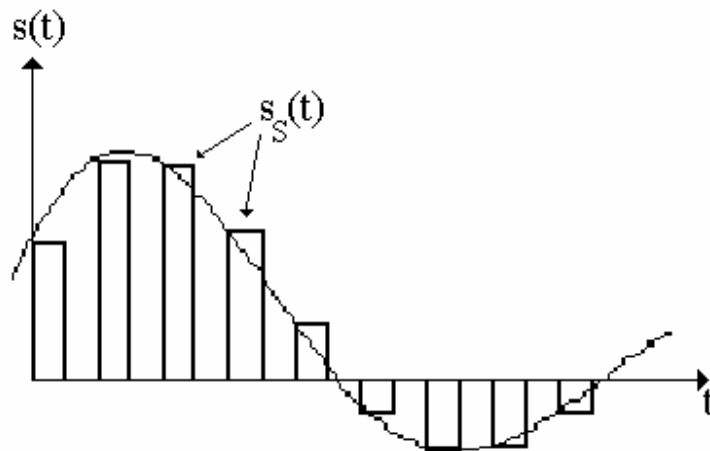


Σχήμα 6.9. Κύκλωμα δειγματοληψίας και κατακράτησης.

Η διάρκεια τ των παλμών δειγματοληψίας, δηλαδή ο χρόνος ανοίγματος, επιλέγεται να είναι αρκετά μικρός, έτσι ώστε ο χρόνος παρακολούθησης να είναι μηδενικός. Τέλος, ο πυκνωτής C καθορίζεται σε συνδυασμό με την τιμή της ωμικής αντίστασης, που εμφανίζει ο αναλογικός διακόπτης, όταν είναι κλειστός (κατάσταση σύνδεσης) και την τιμή της αντίστασης εισόδου της επόμενης διάταξης επεξεργασίας (αν υπάρχει), όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, έτσι ώστε να είναι "γρήγορη" η φόρτιση δηλαδή μέσα στο χρόνο απόκτησης, και "αργή" η εκφόρτιση του πυκνωτή, δηλαδή μηδενική μεταβολή κατά το χρόνο κατακράτησης αντίστοιχα.

6.6 Δειγματοληψία Διαπλατυσμένης Κορυφής (*Flat-top Sampling*)

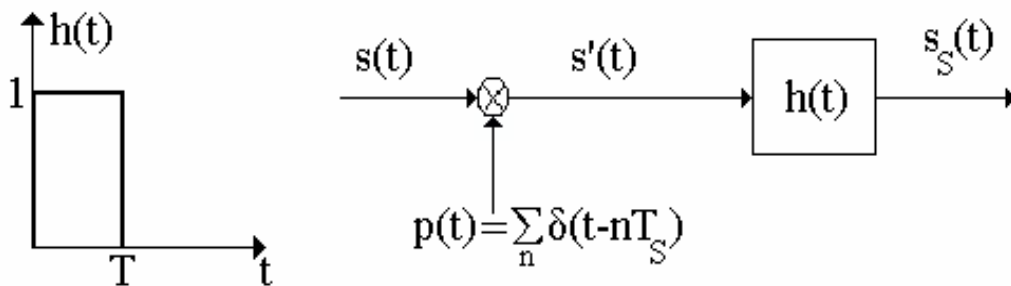
Η δειγματοληψία αυτή είναι η πιο δημοφιλής στην πράξη και σαν αποτέλεσμα δίνει παλμούς, οι οποίοι είναι οριζόντιοι και η τιμή τους εξαρτάται από την τιμή του σήματος κατά τη στιγμή της δειγματοληψίας. Η εξήγηση της γίνεται με τη βοήθεια του Σχήματος 6.10, όπου οι παλμοί παίρνουν την τιμή του $s(t)$ στην αρχή της διάρκειάς τους.



Σχήμα 6.10. Δειγματοληψία διαπλατυσμένης κορυφής.

Έστω το σήμα $s(t)$ του Σχήματος 6.10, το οποίο πολλαπλασιάζεται με μια χτένα (τραίνο ώσεων) και η πράξη αυτή δίνει τα δείγματά του στα σημεία του *Nyquist*. Αν τώρα το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού περάσει από ένα γραμμικό σύστημα με κρουστική συνάρτηση $h(t)$, όμοια μ' αυτή του Σχήματος 6.11, η έξοδος θα είναι δειγματοληψία διαπλατυσμένης κορυφής, γιατί κάθε συνάρτηση δέλτα θα "κρατηθεί" για λίγο

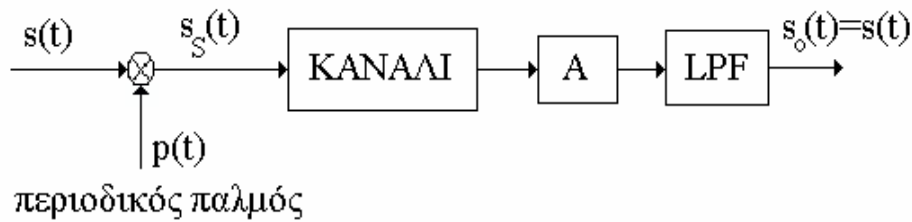
διάστημα. Στο πεδίο της συχνότητας, το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι να αλλάξει το $S'(\omega)$, αφού πολλαπλασιάζεται με το $H(\omega)$, που έχει μορφή $H(\omega) = k \cdot \sin\omega/\omega$. Η αναδημιουργία του $s(t)$ μπορεί να γίνει στο δέκτη ως εξής: Πρώτα το σήμα $s_S(t)$ περνάει από ένα γραμμικό σύστημα, το οποίο κάνει την αντίστροφη πράξη από το $h(t)$, έχει δηλαδή συνάρτηση μεταφοράς $H'(\omega) = 1/H(\omega)$. Το εξαγόμενο σήμα έχει την αρχική μορφή του $s'(t)$ και συνεπώς ένα χαμηλοπερατό φίλτρο εύκολα ξαναδημιουργεί το $s(t)$.



Σχήμα 6.11. Κρουστική συνάρτηση μεταφοράς και "block" διάγραμμα δειγματοληψίας διαπλατυσμένης κορυφής.

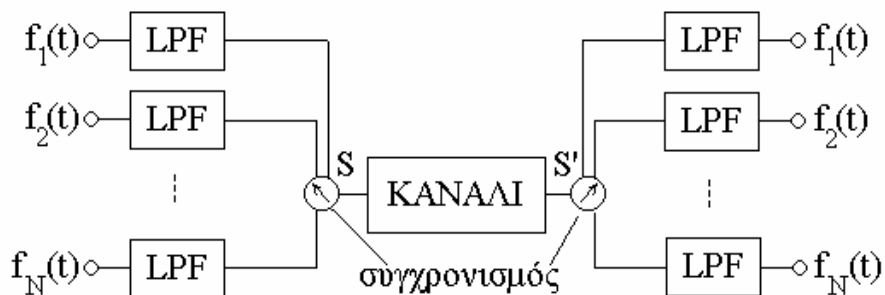
6.7 Διαμόρφωση Πλάτους Παλμών (*Pulse Amplitude Modulation, PAM*) και Πολυπλεξία στο Πεδίο του Χρόνου (*Time Division Multiplexing, TDM*)

Έχοντας αναφερθεί στη δειγματοληψία αναλογικών σημάτων περιορισμένου εύρους ζώνης, η διαμόρφωση πλάτους των παλμών (*PAM*) έχει περιγραφεί πλήρως. Στον πομπό γίνεται η φυσική δειγματοληψία, με αποτέλεσμα το νέο σήμα να αποτελείται από σειρά παλμών με πλάτος ανάλογο με τις τιμές του σήματος πληροφορίας. Το κανάλι είναι συνήθως ένα χαμηλοπερατό φίλτρο (σύρματα π.χ. όπως στο τηλέφωνο ή στην τηλεόραση κλειστού κυκλώματος) και περνάει το βασικό φάσμα των παλμών. Στον δέκτη, μετά από ενίσχυση (κουτί Α), το σήμα μετατρέπεται στην αρχική του μορφή μ' ένα χαμηλοπερατό φίλτρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.12.



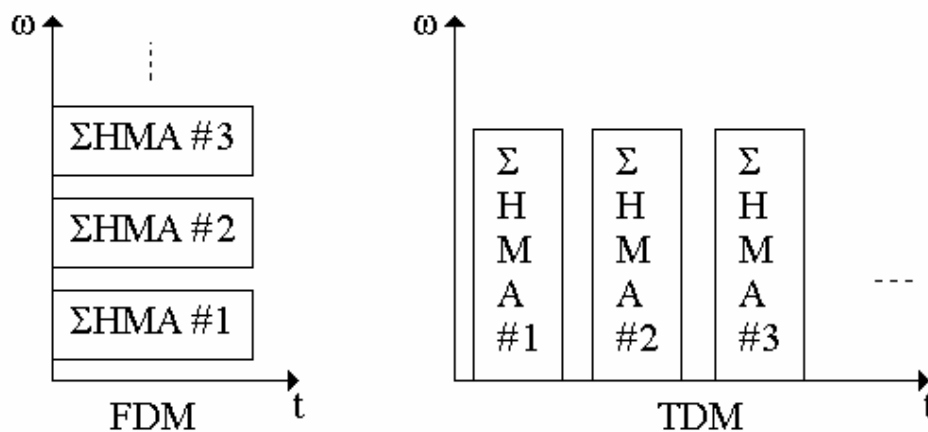
Σχήμα 6.12. Αποδιαμόρφωση PAM.

Το σύστημα PAM δεν είναι πολύ ενδιαφέρον, όταν χρησιμοποιείται για τη μετάδοση ενός μόνο σήματος πληροφορίας. Εκείνο, που το κάνει ενδιαφέρον και χρήσιμο, είναι η δυνατότητα που παρέχει για τη μετάδοση πολλών σημάτων "ταυτόχρονα". Στο Κεφάλαιο 3 δόθηκε ο ορισμός της Πολυπλεξίας και εξηγήθηκε η τεχνική πολυπλεξίας με διαίρεση συχνότητας (FDM). Στη συνέχεια δίνεται η εξήγηση της **Πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου** (Time Division Multiplexing, TDM). Έστω ένα πληροφοριακό σήμα $f(t)$ περιορισμένου εύρους ζώνης με μέγιστη συχνότητα $f_{0(\max)} = 5$ kHz. Το θεώρημα του Shannon λέει ότι πρέπει τα δείγματα να λαμβάνονται τουλάχιστον κάθε $\pi/\omega_{0(\max)}$ ή $1/2f_{0(\max)}$, δηλαδή κάθε 10^{-4} δευτερόλεπτα (100 μsecs). Έστω, επίσης, ότι η δειγματοληψία είναι "φυσική" και γίνεται με περιοδικούς παλμούς $p(t)$ με διάρκεια παλμού 5 μsecs. Συνεπώς, τα υπόλοιπα 95 μsecs μένουν άχρηστα και ο χρόνος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για άλλα σήματα. Δηλαδή, μπορεί να τοποθετηθεί ένα άλλο σήμα, του οποίου το πρώτο δείγμα αρχίζει στο 7ο μsec και τελειώνει στο 12ο μsec, ένα τρίτο από 14-19 μsecs κ.λ.π. Όταν όλα αυτά συνδυαστούν υπό τη μορφή συστήματος, το αποτέλεσμα ονομάζεται **Σύστημα Πολυπλεξίας με Διαίρεση Χρόνου**. Ένα τέτοιο σύστημα φαίνεται στο Σχήμα 6.13.



Σχήμα 6.13. Σύστημα πολυπλεξίας με διαίρεση χρόνου.

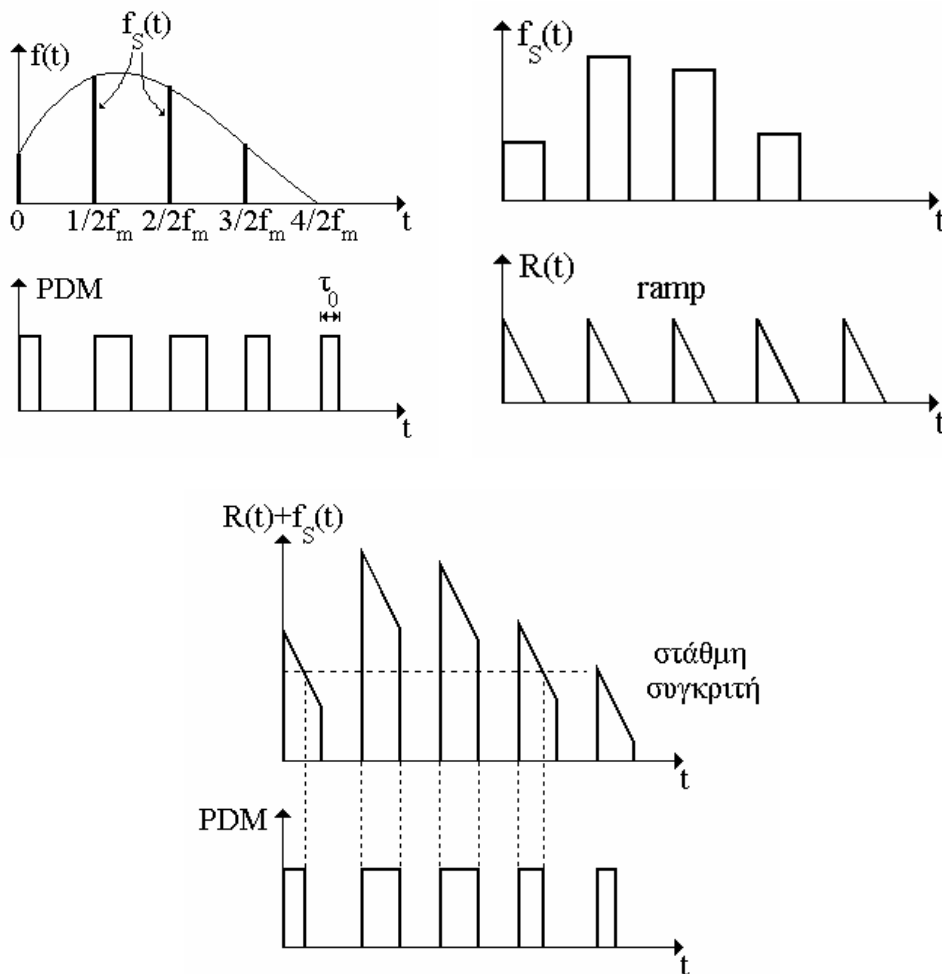
Στον πομπό το χαμηλοπερατό φίλτρο περιορίζει όλα τα σήματα πληροφορίας μέχρι τη συχνότητα $f_{0(\max)}$. Ο ηλεκτρονικός διακόπτης S γυρίζει γύρω-γύρω με τέτοια ταχύτητα, ώστε να κάνει $1/2f_{0(\max)}$ sec να επιστρέψει στο ίδιο σημείο. Με τον τρόπο αυτό λαμβάνει δείγματα από κάθε σήμα ικανοποιώντας την απαίτηση του θεωρήματος του Shannon. Στο κάθε σημείο παραμένει ένα χρονικό διάστημα, που καθορίζει τη χρονική διάρκεια του κάθε δείγματος - "χρονοθυρίδα" (time-slot). Το χρονικό διάστημα μεταξύ των δειγμάτων ονομάζεται "ζώνη ασφαλείας" (guard time) και ο ρόλος του στην πράξη είναι να μηδενίσει ή τουλάχιστον να περιορίσει την εμφάνιση αλληλοεπικαλύψεων των δειγμάτων διαδοχικών σημάτων, η οποία λέγεται **διομιλία** (cross-talk). Έτσι, αν η περίοδος της δειγματοληψίας είναι T_s και πολυπλέκονται N το πλήθος σήματα, τότε ισχύει η σχέση $N(\tau_p + \tau_g) = T_s$, όπου τ_p είναι η διάρκεια κάθε χρονοθυρίδας και τ_g η ζώνη ασφάλειας. Ένα, επίσης, σημαντικό κομμάτι είναι ο συγχρονισμός των δύο διακοπών - ρολογιών S και S'. Τέλος, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι, στο σύστημα TDM τα σήματα είναι εντελώς ανακατεμένα στο πεδίο της συχνότητας, ενώ στο πεδίο του χρόνου το καθένα έχει τη δική του θέση, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στην Πολυπλεξία με Διαίρεση Συχνότητας (FDM) (Σχήμα 6.14).



Σχήμα 6.14. Κατανομή σημάτων FDM και TDM στα πεδία χρόνου και συχνότητας.

6.8 Διαμόρφωση Διάρκειας Παλμών (*Pulse Duration Modulation, PDM*)

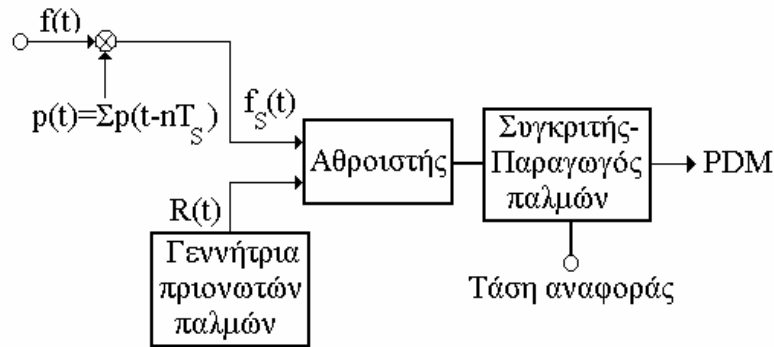
Η διαμόρφωση αυτή είναι ανάλογη με τη διαμόρφωση *FM*. Σ' αυτήν η χρονική διάρκεια κάθε παλμού μιας παλμοσειράς μεταβάλλεται ανάλογα με την τιμή του σήματος πληροφορίας κατά τη στιγμή της δειγματοληψίας. Έτσι, αν τ_0 είναι η διάρκεια των παλμών με μηδενική πληροφορία ($f(t) = 0$ όπως στο σημείο $t = 2/f_m$), τότε η διάρκεια του παλμού θα είναι $\tau = \tau_0[1 + kf(t)]$, όπου k μια σταθερά και $f(t)$ το πληροφοριακό σήμα.



Σχήμα 6.15. Διαμόρφωση PDM.

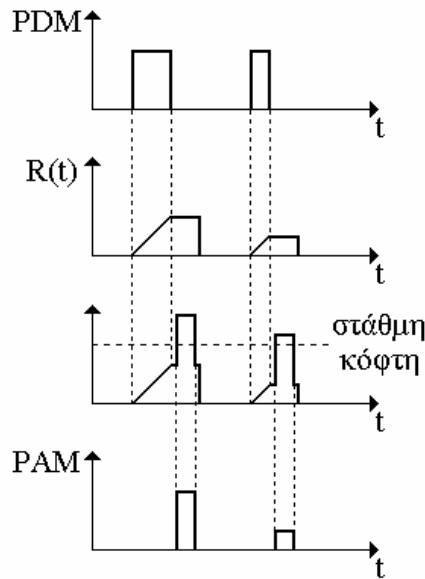
Στο Σχήμα 6.15 εξηγείται η παραγωγή της διαμόρφωσης PDM. Αρχικά, το σήμα $f(t)$ υφίσταται δειγματοληψία διαπλατυσμένης κορυφής από μια παλμοσειρά $p(t)$. Στη συνέχεια, μια συνάρτηση αναρρίχησης (*ramp*), η οποία είναι συγχρονισμένη με τους

παλμούς του $p(t)$ προστίθεται στην $f_s(t)$. Το αποτέλεσμα του αθροίσματος περνάει από ένα συγκριτή, ο οποίος είναι μια ηλεκτρονική συσκευή, που συγκρίνει το εισαγόμενο σήμα με μια τιμή (στάθμη). Για όσο χρονικό διάστημα το σήμα $(R(t) + f_s(t))$ είναι μεγαλύτερο από τη στάθμη η έξοδος του συγκριτή είναι Α. Το *block* διάγραμμα ενός πομπού *PDM* δίνεται στο Σχήμα 6.16.



6.16. Πομπός *PDM*.

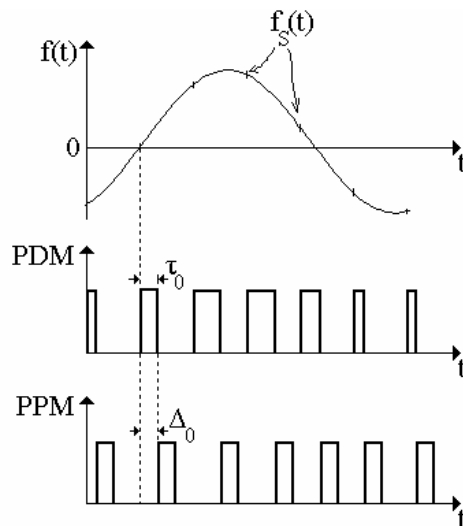
Στο δέκτη ενός συστήματος *PDM*, όπως φτάνουν οι παλμοί του σήματος *PDM*, η αρχή τους χρησιμοποιείται σαν "σκανδάλη" (*trigger*) σε ένα κύκλωμα, που δίνει στην έξοδό του μια συνάρτηση αναρρίχησης. Το τέλος του παλμού *PDM* σταματά τη συνάρτηση αναρρίχησης, αυτή δε η τελική της τιμή διατηρείται για ένα μικρό ακόμα χρονικό διάστημα. Φυσικά, όσο πιο μεγάλη διάρκεια έχει ο παλμός, τόσο μεγαλύτερη είναι και η τελική τιμή της συνάρτησης αναρρίχησης. Με τον τρόπο αυτό η διάρκεια των παλμών μετατρέπεται ξανά σε πλάτος. Στο σήμα αυτό προστίθεται ένα περιοδικό σήμα σταθερού πλάτους και η πρόσθεση γίνεται στο μέρος του προηγούμενου σήματος, που διατηρούσε την τελική τιμή της συνάρτησης αναρρίχησης. Σημειώνεται ότι το χρονικό σημείο, στο οποίο προστίθεται ο περιοδικός παλμός σε κάθε δείγμα είναι διαφορετικό. Τέλος, ένα κύκλωμα ψαλιδισμού χρησιμοποιείται για να δώσει το αρχικό σήμα *PAM* διαπλατυσμένης κορυφής, από το οποίο είναι γνωστό πως μπορεί να παραχθεί το αρχικό σήμα $f(t)$. Τα διαδοχικά βήματα της αποδιαμόρφωσης αυτής δίνονται στο Σχήμα 6.17.



Σχήμα 6.17. Αποδιαμόρφωση PDM.

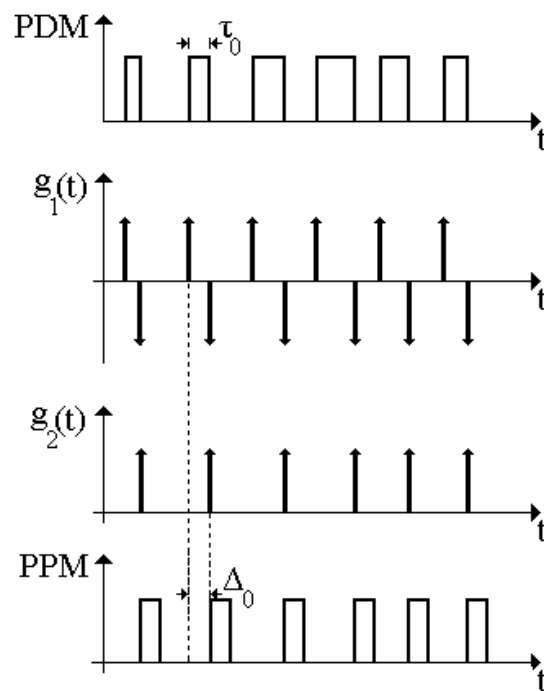
6.9 Διαμόρφωση Θέσης Παλμών (*Pulse Position Modulation PPM*)

Η διαμόρφωση αυτή είναι ανάλογη με τη διαμόρφωση φάσης. Το πληροφοριακό σήμα αναγκάζει τη χρονική θέση του κάθε παλμού να μεταβάλλεται σχετικά με τη θέση του χωρίς σήμα διαμόρφωσης. Συχνά, ένας παλμός αναφοράς εκπέμπεται πριν από κάθε διαμορφωμένο παλμό, για να συγχρονίζει τον πομπό και το δέκτη. Στο Σχήμα 6.18 δίνεται το πληροφοριακό σήμα $f(t)$, το σήμα PDM καθώς και το σήμα PPM.



Σχήμα 6.18. Διαμόρφωση PPM.

Όταν το σήμα $f(t)$ είναι ίσο με μηδέν (δεύτερο δείγμα), τότε ο παλμός $p(t)$ απέχει Δ_0 μονάδες χρόνου από το σημείο του δείγματος. Όταν η τιμή του δείγματος είναι θετική, τότε η απόσταση αυξάνεται, ενώ στην αντίθετη περίπτωση μειώνεται. Η διαμόρφωση αυτή από τιμή πλάτους σε "θέση" γίνεται **γραμμικά**. Στην πράξη η παραγωγή του σήματος PPM μπορεί να γίνει από το σήμα PDM . Αφού το σήμα PDM έχει την τιμή των δειγμάτων του $f(t)$ στη "διάρκεια" των παλμών του $p(t)$, τότε το τέλος των παλμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν αρχή νέων παλμών ίσης διάρκειας. Αυτό ακριβώς δείχνει το Σχήμα 6.19.



Σχήμα 6.19. Δημιουργία σήματος PPM .

Το σήμα PDM περνάει από ένα διαφοριστή και στη συνέχεια ανορθώνεται ημικυματικά. Κατόπιν, η συνάρτηση $g_2(t)$ χρησιμοποιείται σαν "σκανδάλη" σ' ένα "Μονοκρουστικό Πολυδομητή", του οποίου η έξοδος είναι το σήμα PPM , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.20. Το σύστημα PPM είναι πολύ πιο δημοφιλές από το PDM , γιατί ο παλμός μπορεί να γίνει μικρής διάρκειας και αυτό συνεπάγεται οικονομία στην ενέργεια.



Σχήμα 6.20. Διαμορφωτής PPM.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Ένα σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης με μέγιστη συχνότητα 1 kHz και πλάτος 1 V πρόκειται να διαμορφωθεί κατά PPM με διακριτικότητα ± 0.5 mV. Η ελάχιστη διάρκεια των παλμών και η ζώνη "ασφαλείας" τ_g είναι 1 msec. Υπολογίστε το απαιτούμενο εύρος ζώνης για λόγο σήματος-προς-θόρυβο εισόδου 20 dB. Δίνεται ότι για ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο $B \cong 1/(\Delta\tau\sqrt{S/N})$, όπου $\Delta\tau$ είναι η ελάχιστη δυνατή χρονική ακρίβεια του συστήματος παρουσίας θορύβου.

Απάντηση

Από την εκφώνηση δίνονται: $f_s = 2f_{m(\max)} = 2 \text{ kHz} \Rightarrow T_s = 0.5 \text{ msec} = 500 \text{ } \mu\text{sec}$, $\tau_g = \tau_p = 1 \text{ } \mu\text{sec}$. Άρα, ο διαθέσιμος χρόνος για διαμόρφωση: $T_s - \tau_p - \tau_g = 498 \text{ } \mu\text{sec}$ και επομένως η σταθερά διαμόρφωσης είναι: $k = (T_s - \tau_p - \tau_g)/\Delta V = 498/2 \text{ } \mu\text{sec/V} = 249 \text{ } \mu\text{sec/V}$.

Η απαιτούμενη χρονική ακρίβεια είναι: $\Delta\tau = k \cdot (\text{διακριτικότητα σήματος}) = k \cdot \Delta\alpha = 249 \times 2 \times 0.5 \times 10^{-3} \text{ } \mu\text{sec} = 0.249 \text{ } \mu\text{sec}$. Άρα το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι:

$$B = \frac{1}{\Delta\tau\sqrt{S/N}} = \frac{1}{0.249 \times 10^{-3} \times 10} = 402 \text{ kHz}$$