ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

5.1 Εισαγωγή

Ο σκοπός κάθε συστήματος τηλεπικοινωνιών είναι η μεταφορά πληροφορίας από ένα σημείο (πηγή) σ' ένα άλλο (δέκτης). Συνεπώς, κάθε μελέτη ενός τέτοιου συστήματος πρέπει να παρέχει μια βάση υπολογισμού της αποτελεσματικότητάς του σε συνάρτηση με τη μεταφερόμενη ποσότητα πληροφορίας. Η λέξη **πληροφορία** έχει πολλές έννοιες, οπότε πρέπει να γίνει διάκριση μεταξύ της πληροφορίας με την έννοια **ποσότητα μηνυμάτων** και εκείνης με την έννοια **σημαντικότητα των μηνυμάτων**.

Από τη πλευρά της πληροφορίας με έννοια "σημαντικότητα" του μεταφερόμενου μηνύματος, το ποσόν της πληροφορίας είναι αντίστροφα ανάλογο της πιθανότητας, που είχε το αποτέλεσμα του μηνύματος να συμβεί. Υπάρχει, δηλαδή, μια σχέση μεταξύ της ποσότητας πληροφορίας και της πιθανότητας του αποτελέσματος, η οποία περιγράφεται από την πληροφορία. Για καλύτερη κατανόηση δίνεται ακόλουθο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω ότι δύο μαθητές Α και Β δίνουν πανελλήνιες εξετάσεις, από τους οποίους ο μεν Α είναι αριστούχος μαθητής, ο δε Β μόλις περνάει τη βάση στο απολυτήριο. Διαβάζοντας τα αποτελέσματα βλέπει κανείς ότι ο μαθητής Α πέτυχε, ενώ ο μαθητής Β απέτυχε. Είναι φανερό ότι ένα τέτοιο μήνυμα δεν έχει σημασία μιας και ήταν αναμενόμενο, δηλαδή δεν περιέχει πληροφορία. Αντίθετα, αν διαβάζοντας τα αποτελέσματα έβλεπε ότι ο μαθητής Α απέτυχε, ενώ ο μαθητής Β πέτυχε, τότε το μήνυμα αυτό έχει πολλή πληροφορία, γιατί ήταν κάτι που δεν το περίμενε κανείς.

Συνεπώς, όταν η πιθανότητα να συμβεί το αποτέλεσμα είναι μονάδα, τότε η ποσότητα της μεταφερόμενης πληροφορίας είναι μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι δεν χρειάζεται η διαβίβαση του μηνύματος, αφού το αποτέλεσμα είναι βέβαιο ότι θα συμβεί. Αντίθετα, αν η πιθανότητα του αποτελέσματος να συμβεί είναι μηδενική (απόλυτη αβεβαιότητα), τότε η μεταφερόμενη πληροφορία είναι άπειρη. Δηλαδή η σχέση της ποσότητας πληροφορίας και της πιθανότητας είναι **λογαριθμική:**

I = **Πληροφορία** = - log p (5.1)

Από την πλευρά του μηχανικού των τηλεπικοινωνιών, η έννοια πληροφορία συνδέεται με την ποσότητα των μηνυμάτων και τη μετράει με μέτρο το χρόνο, που χρειάζεται για να στείλει ένα ή περισσότερα μηνύματα. Ας θεωρηθεί η εκπομπή ενός σήματος, που αφορά τον αίθριο καιρό "*A*" ή το βροχερό καιρό "*B*" και τα δύο σήματα θεωρούνται ισοπίθανα. Είναι φανερό ότι ένα δυαδικό ψηφίο χρειάζεται για την εκπομπή του σήματος, που περιγράφει τον καιρό. Στη συνέχεια, ας υποτεθεί ότι, ένα μήνυμα τεσσάρων ισοπίθανων καταστάσεων *A*, *B*, *Γ* και *Δ* πρέπει να μεταδοθεί. Αν οι καταστάσεις αυτές μεταδοθούν με δυαδικά ψηφία, τότε δύο δυαδικά ψηφία μπορούν να καθορίσουν καθεμία κατάσταση, δηλαδή δύο χρονικοί παλμοί είναι αρκετοί για την εκπομπή μιας από τις δύο καταστάσεις. Αυτό σημαίνει ότι χρειάζονται δύο ψηφία πληροφορίας και απαιτείται διπλάσιος χρόνος από ότι στην προηγούμενη περίπτωση. Ανάλογα, για την εκπομπή οκτώ ισοπίθανων γεγονότων, θα υπάρχουν τρία ψηφία πληροφορίας και απαιτείται τριπλάσιος χρόνος εκπομπής. Επομένως, αν υπάρχουν N ισοπίθανα αποτελέσματα, τότε θ' απαιτούνται $\log_2 N$ ψηφία πληροφορίας και, συνεπώς, η πληροφορία είναι λογαριθμική συνάρτηση της πιθανότητας του σήματος. Η βάση του λογαρίθμου καθορίζει τη μονάδα, που ορίζεται για την πληροφορία. Έτσι, όταν χρησιμοποιείται ο φυσικός λογάριθμος (*natural*), τότε η μονάδα είναι το ***nat***, ενώ όταν χρησιμοποιείται ο δεκαδικός λογάριθμος, τότε η μονάδα είναι το ***Hartley*** ή ***decit***. Συνήθως, ως βάση χρησιμοποιείται το δύο, οπότε η μονάδα πληροφορίας είναι το ***bit***.

Τέλος, όταν δύο **ανεξάρτητα** μηνύματα m_1 και m_2 μεταφέρονται σωστά, τότε η ποσότητα της μεταφερόμενης πληροφορίας είναι το άθροισμα της μεταφερόμενης πληροφορίας από κάθε μήνυμα ξεχωριστά.

5.2 Μέση Πληροφορία ή Εντροπία

Έστω ότι υπάρχουν M μηνύματα ανεξάρτητα $m_1, m_2, ..., m_M$ με αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης $p_1, p_2, ..., p_M$. Τότε, κατά τη μετάδοση μιας μεγάλης σειράς L μηνυμάτων, ο αριθμός εμφάνισης καθενός από τα παραπάνω μηνύματα είναι p_1L, p_2L, ..., p_ML, αντίστοιχα. Έτσι, το συνολικό ποσό της μεταφερόμενης πληροφορίας είναι:

$$I_{total} = -\sum_{i=1}^{M} p_i L \log_2 p_i = -L\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i \tag{5.2}$$

Τότε, **μέση πληροφορία** ή **εντροπία** *H* ορίζεται το πηλίκο της συνολικής ποσότητας πληροφορίας προς τον αριθμό των μηνυμάτων, δηλαδή:

$$H = \frac{I_{total}}{L} = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i \ \text{bits/μήνυμα} \tag{5.3}$$

Η εντροπία είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας των διαφόρων μηνυμάτων. Όσο μεγαλύτερη είναι η εντροπία, τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα και, επομένως, τόσο μεγαλύτερη είναι η ποσότητα της μεταφερόμενης πληροφορίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

2. Έστω ένα σήμα με δυαδικά ψηφία "0" και "1", με πιθανότητες $p(0) = 1/8$ και $p(1) = 7/8$. Η ποσότητα πληροφορίας του κάθε ψηφίου είναι: $I(0) = -\log_2 p(0) = -\log_2(1/8) = 3$ και $I(1) = -\log_2 p(1) = -\log_2(7/8) = 0.193$.

3. Έστω ότι υπάρχουν *M* ισοπίθανα και ανεξάρτητα μηνύματα και *N* είναι ακέραιος τέτοιος ώστε $M = 2^N$. Στην περίπτωση αυτή η πληροφορία κάθε μηνύματος είναι:

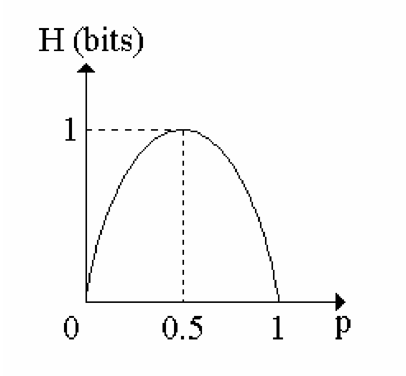
$I_k = -\log_2 p_k = -\log_2(1/M) = \log_2 M = N$ bits.

4. Έστω τα μηνύματα *A*, *B*, *Γ*, *Δ* με αντίστοιχες πιθανότητες 1/2, 1/4, 1/8, 1/8. Η πληροφορία του μηνύματος $X = BΔA$, θεωρώντας ότι τα μηνύματα είναι ανεξάρτητα, είναι: $I_x = \log_2 4 + \log_2 8 + \log_2 2 = 6$ bits.

5. Υπολογίστε και σχεδιάστε την εντροπία ενός δυαδικού κώδικα, στον οποίο η πιθανότητα εμφάνισης του κάθε συμβόλου είναι *p* και $q = 1 - p$, αντίστοιχα.

$$H = \sum_{i=1}^{2} p_i \log_2(1/p_i) = p\log_2(1/p) + (1-p)\log_2[1/(1-p)]$$

Η γραφική παράσταση της μεταβολής της εντροπίας με την πιθανότητα p δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σημειώνεται ότι για $p = 0$ και $p = 1$ η εντροπία μηδενίζεται, ενώ η μέγιστη τιμή της εμφανίζεται όταν $p = q = 0.5$, οπότε, η αντίστοιχη τιμή της μέσης πληροφορίας είναι 1 bit/μήνυμα. Επιπλέον, όταν υπάρχουν M μηνύματα, μπορεί να αποδειχτεί ότι η μέση πληροφορία ανά μήνυμα γίνεται μέγιστη, όταν όλα τα μηνύματα είναι ισοπίθανα και η τιμή της εντροπίας είναι $H_{\max} = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{M} \log_2 M = \log_2 M$.



6. Να υπολογιστεί η εντροπία H για τον τετραδικό κώδικα του Παραδείγματος 4 καθώς και την εντροπία στην περίπτωση, που τα τέσσερα μηνύματα είναι ισοπίθανα.

α) $H = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{4}\log_2 4 + 2\frac{1}{8}\log_2 8 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2 \cdot 3}{8} = 1.75$ bits/μήνυμα.

β) $H = 4\frac{1}{4}\log_2 4 = 2$ bits/μήνυμα.

5.3 Ρυθμός Πληροφορίας

Στα συστήματα τηλεπικοινωνιών, ο **ρυθμός πληροφορίας** ή **μέσος ρυθμός παροχής πληροφορίας *R*** ορίζεται από τη σχέση:

$$R = r_S H \text{ bits/sec} \qquad (5.4)$$

όπου r_S είναι ο ρυθμός μετάδοσης μηνυμάτων (συμβόλων) και H η μέση πληροφορία ανά μήνυμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Μια διακριτή πηγή εκπέμπει ένα από τα πέντε μηνύματα κάθε 1 msec. Αν οι πιθανότητες των μηνυμάτων είναι 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 και 1/16, βρείτε την εντροπία της πηγής και το μέσο ρυθμό πληροφορίας.

Απάντηση

$H = \sum_{i=1}^{5} p_i \log_2(1/p_i) = 1.875$ bits/μήνυμα και R = 1875 bits/sec.

5.4 Χωρητικότητα Καναλιού - Θεώρημα *Shannon*

Στις τηλεπικοινωνίες **κανάλι** ορίζεται ο χώρος μετάδοσης της πληροφορίας ανάμεσα στον πομπό και στο δέκτη και **χωρητικότητα καναλιού** ονομάζεται η οριακή τιμή του ρυθμού μετάδοσης πληροφορίας μέσα από το κανάλι. Ο λόγος του ορισμού της χωρητικότητας καναλιού απορρέει από το παρακάτω θεώρημα (**Θεώρημα *Shannon***), το οποίο είναι θεμελιώδες στη θεωρία των τηλεπικοινωνιών.

Θεώρημα: Αν ο ρυθμός πληροφορίας R είναι μικρότερος ή το πολύ ίσος με τη χωρητικότητα C του καναλιού, δηλαδή

$$R \leq C \tag{5.5}$$

τότε, υπάρχει πάντα μια τεχνική κωδικοποίησης, έτσι ώστε να είναι δυνατή η μετάδοση πληροφορίας μέσα από το κανάλι με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα σφάλματος. Αντίθετα, αν $R > C$, τότε δεν είναι δυνατή η μετάδοση μηνυμάτων χωρίς λάθη.

Η εξίσωση (5.5) ισχύει ακόμα και στην περίπτωση, που υπάρχει θόρυβος στο κανάλι.

5.5 Χωρητικότητα ενός Καναλιού Κατανομής *Gauss*

Στην πράξη για να είναι δυνατή η σύγκριση των διαφόρων ειδών συστημάτων τηλεπικοινωνιών, το κανάλι περιγράφεται σε σχέση με το εύρος ζώνης και το λόγο σήματος-προς-θόρυβο (*SNR*). Για το λόγο αυτό, υπάρχει το θεώρημα *Hartley-Shannon*, που αποτελεί συμπλήρωμα του θεωρήματος *Shannon*, και εφαρμόζεται σε κανάλι, του οποίου ο θόρυβος έχει κατανομή *Gauss*.

Θεώρημα: Η χωρητικότητα C ενός καναλιού εύρους ζώνης B με προσθετικό θόρυβο με κατανομή *Gauss* περιορισμένου εύρους ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$C = B\log_2(1+\frac{S}{N}) \text{ bits per second ή bps} \tag{5.6}$$

όπου S και N είναι οι μέσες ισχείς του σήματος και του θορύβου, αντίστοιχα, στην έξοδο του καναλιού.

Το θεώρημα αυτό αν και περιορίζεται για την περίπτωση *Gaussian* θορύβου, η συνέπειά του είναι γενική, αφού στα περισσότερα συστήματα τηλεπικοινωνιών το κανάλι μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα *Gaussian* κανάλι. Επίσης, το θεώρημα εφαρμόζεται και σε διακριτά και σε συνεχή κανάλια. Τέλος, το παραπάνω θεώρημα έχει δύο σπουδαίες συνέπειες. Πρώτον, δίνει τη μέγιστη δυνατή τιμή του ρυθμού μετάδοσης αξιόπιστων δεδομένων μέσα από ένα *Gaussian* κανάλι. Έτσι, κάθε σχεδιασμός συστήματος πρέπει να γίνεται, έτσι ώστε η χωρητικότητα C να πλησιάζει την τιμή της εξίσωσης (5.6) μ΄ έναν αποδεκτό ρυθμό σφαλμάτων. Η δεύτερη συνέπεια του θεωρήματος αυτού έχει να κάνει με την ανταλλαγή σήματος-προς-θόρυβο με το εύρος ζώνης. Για να γίνει κατανοητή η ανταλλαγή αυτή δίνεται το ακόλουθο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να βρεθεί η απαιτούμενη χωρητικότητα καναλιού εύρους ζώνης B = 3 kHz για την ασφαλή μεταφορά δεδομένων με ρυθμό 10 kbps. Επίσης, να υπολογίσετε τη μεταβολή του *SNR*, όταν το B = 10 kHz.

Απάντηση

Επειδή R = 10000 bps $\Rightarrow C \geq$ 10000 bps. Όταν B = 3 kHz $\Rightarrow SNR = 2^{(C/B)} - 1 \cong 9$, ενώ όταν B = 10 kHz $\Rightarrow SNR$ = 1. Δηλαδή, μια αύξηση του εύρους ζώνης από 3 kHz σε 10 kHz, οδηγεί σε μείωση του *SNR* από 9 σε 1.

Στο παραπάνω παράδειγμα δόθηκε η κλειστή σχέση, που συνδέει την ποσότητα της μεταφερόμενης πληροφορίας, του εύρους ζώνης του καναλιού και του λόγου σήματος-προς-θόρυβο. Συγκεκριμένα, αύξηση του εύρους ζώνης μπορεί να εκμεταλλευθεί με ελάττωση του λόγου σήματος-προς-θόρυβο και, αντίστροφα, ελάττωση του εύρους ζώνης πρέπει να πληρωθεί με αύξηση του λόγου σήματος-προς-θόρυβο, για δεδομένη ποσότητα μεταφερόμενης πληροφορίας.

Από το θεώρημα *Hartley-Shannon* φαίνεται ότι η χωρητικότητα του καναλιού τείνει στο άπειρο, καθώς το εύρος ζώνης *B* τείνει στο άπειρο, για ένα κανάλι δίχως θόρυβο. Στην πράξη όμως, η χωρητικότητα του καναλιού δεν απειρίζεται καθώς το εύρος ζώνης τείνει στο άπειρο, αφού αύξηση του εύρους ζώνης έχει σαν συνέπεια την αύξηση της ισχύος του θορύβου. Συνεπώς, για ένα καθορισμένο σήμα ισχύος με την παρουσία *Gaussian* θορύβου, η χωρητικότητα του καναλιού πλησιάζει ένα άνω όριο καθώς το εύρος ζώνης αυξάνει. Στο Παράδειγμα 9 υπολογίζεται το όριο αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

9. Να υπολογιστεί το όριο της εξίσωσης (5.6), καθώς το εύρος ζώνης αυξάνει πλησιάζοντας το άπειρο.

Απάντηση

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $N = nB$ στην εξίσωση (5.6), η τελευταία γράφεται:

$$C = B\log_2(1+\frac{S}{nB}) = \frac{S}{n}\cdot\frac{nB}{S}\log_2(1+\frac{S}{nB}) = \frac{S}{n}\log_2[(1+\frac{S}{nB})^{nB/S}]$$

όπου n είναι η πυκνότητα του φάσματος ισχύος του θορύβου. Η τελευταία σχέση με την αντικατάσταση $x = S/nB$ γράφεται:

$$C = \frac{S}{n}\log_2[(1+x)^{1/x}]$$

η οποία για $B \to +\infty$ δίνει:

$$\lim_{B\to\infty} C = \frac{S}{n}\log_2 \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \frac{S}{n}\log_2 e = \frac{S}{n}\cdot\frac{\ln e}{\ln 2} \cong 1.44\frac{S}{n} \text{ (bps)} \tag{5.7}$$

10. Υπολογίστε τη χωρητικότητα ενός καναλιού χαμηλών συχνοτήτων με διαθέσιμο εύρος ζώνης 3000 Hz και λόγο σήματος-προς-θόρυβο $SNR = 10^3$ στην έξοδό του. Υποτίθεται ότι ο θόρυβος του καναλιού είναι *Gaussian*.

Απάντηση

Η χωρητικότητα του καναλιού C δίνεται από την εξίσωση (5.6):

$$C = B\log_2(1+\frac{S}{N})=3000\times\log_2(1+1000)\cong 29902 \text{ bps}$$

11. Υπολογίστε τη χωρητικότητα ενός καναλιού με κατανομή θορύβου τύπου *Gauss*, εύρος ζώνης 1 MHz και λόγο σήματος-προς-θόρυβο *SNR* = 30 dB. Στη συνέχεια, υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται για τη μετάδοση ενός εκατομμυρίου χαρακτήρων ASCII με το παραπάνω κανάλι. (Σημειώνεται ότι στον κώδικα ASCII κάθε χαρακτήρας είναι κωδικοποιημένος σε δυαδικά ψηφία των 8-bits).

Απάντηση

Η χωρητικότητα του καναλιού C δίνεται από τη σχέση (5.6):

$$C = B\log_2(1+\frac{S}{N})=10^6\log_2(1+10^{30/10})\cong 9.97\times 10^6 \text{ bps}$$

Ο χρόνος, που χρειάζεται για τη μετάδοση του ενός εκατομμυρίου χαρακτήρων, δίνεται από το λόγο του συνολικού αριθμού των bits προς τη χωρητικότητα του καναλιού, ουσιαστικά του αντίστροφου του ρυθμού μετάδοσης δεδομένων, δηλαδή:

$$T=\frac{1}{r_S}=\frac{H}{R}=\frac{H}{C}=\frac{8\times 10^6 \text{ bits}}{9.97\times 10^6 \text{ bps}}=0.802 \text{ sec}$$

12. Ένα Gaussian κανάλι έχει εύρος ζώνης 4 kHz και πυκνότητα φάσματος ισχύος ίση με 10^{-14} W/Hz. Αν η ισχύς του σήματος στη λήψη πρέπει να είναι τουλάχιστον 1 mW, υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού.

Απάντηση

$$C = B\log_2(1+\frac{S}{N}) = B\log_2\left[1+\frac{S}{(n/2)2B}\right] = 4\times 10^3\times\log_2(1+\frac{10^{-3}}{10^{-14}\cdot 2\cdot 4\times 10^3})\cong 94.3$$

kbps