

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

### ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ

#### 4.1 Εισαγωγή

Ένας ημιτονοειδής φορέας της μορφής  $c(t) = A_c \cos[\theta(t)]$  είναι δυνατόν να διαμορφωθεί από ένα πληροφοριακό σήμα  $m(t)$ , όχι μόνο με μεταβολή του εύρους του (όπως στη διαμόρφωση πλάτους), αλλά και με μεταβολή της γωνίας του  $\theta(t)$ . Έτσι, ανάλογα με το αν το πληροφοριακό σήμα διαμορφώνει τη φάση ή τη συχνότητα του φορέα, διακρίνονται οι περιπτώσεις της **διαμόρφωσης φάσης** (*Phase Modulation, PM*) και της **διαμόρφωσης συχνότητας** (*Frequency Modulation, FM*). Τα διαμορφωμένα κατά φάση ή συχνότητα σήματα έχουν αντίστοιχα τη μορφή:

$$x_{PM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + k_p m(t) + \psi] \quad (4.1)$$

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + k_\omega \int_0^t m(t') dt' + \psi] \quad (4.2)$$

όπου  $\omega_c$  είναι η συχνότητα του αδιαμόρφωτου φορέα,  $k_p$  και  $k_\omega$  είναι σταθερές, ενώ  $\psi$  είναι η (σταθερή) φάση, η οποία για λόγους απλότητας και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μηδενική ( $\psi = 0$ ).

Από την εξίσωση (4.1) είναι προφανές ότι η **στιγμιαία φάση** του διαμορφωμένου κατά φάση σήματος  $x_{PM}(t)$  είναι:

$$\theta(t) = \omega_c t + k_p m(t) \quad (4.3)$$

δηλαδή η στιγμιαία φάση του διαμορφωμένου σήματος μεταβάλλεται γραμμικά με το πληροφοριακό σήμα  $m(t)$ . Στο διαμορφωμένο κατά φάση σήμα, η **στιγμιαία συχνότητα**  $\omega_i(t)$  θα είναι η χρονική παράγωγος της στιγμιαίας φάσης του, δηλαδή:

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_p \frac{dm(t)}{dt} \quad (4.4)$$

Έτσι, στο διαμορφωμένο κατά φάση σήμα η στιγμιαία συχνότητα μεταβάλλεται ανάλογα με τη χρονική παράγωγο του πληροφοριακού σήματος.

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (4.2), η στιγμιαία φάση του διαμορφωμένου κατά συχνότητα σήματος είναι ανάλογη με το ολοκλήρωμα του πληροφοριακού σήματος, δηλαδή:

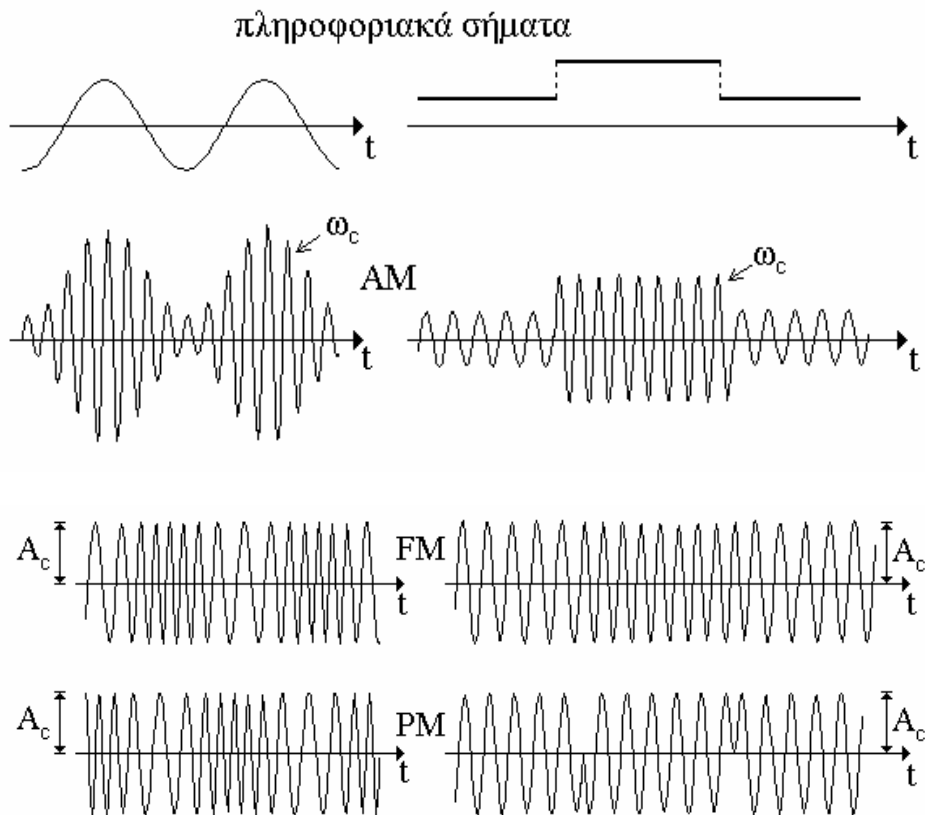
$$\theta(t) = \omega_c t + k_\omega \int_0^t m(t') dt' \quad (4.5)$$

Έτσι, η στιγμιαία συχνότητα του διαμορφωμένου κατά συχνότητα σήματος είναι:

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_\omega m(t) \quad (4.6)$$

μεταβάλλεται, δηλαδή, ανάλογα με το πληροφοριακό σήμα  $m(t)$ .

Οι τεχνικές διαμόρφωσης  $PM$  και  $FM$  συνδέονται στενά μεταξύ τους, αφού διαμόρφωση  $FM$  από κάποιο σήμα  $m(t)$  ισοδυναμεί με διαμόρφωση  $PM$  του ίδιου φορέα από το ολοκλήρωμα του σήματος  $m(t)$ . Για το λόγο αυτό, αν και υπάρχουν ορισμένες σημαντικές διαφορές μεταξύ των τεχνικών  $PM$  και  $FM$ , θα αναλυθεί κυρίως η διαμόρφωση  $FM$ , η οποία και συναντάται πιο συχνά στις εφαρμογές.



Σχήμα 4.1. Διαμορφωμένα κατά πλάτος, συχνότητα και φάση σήματα.

Στο Σχήμα 4.1 δίνονται τα διαμορφωμένα κατά πλάτος, συχνότητα και φάση σήματα, για δύο διαφορετικά πληροφοριακά σήματα. Γίνεται αμέσως φανερό ότι, ενώ τα διαμορφωμένα κατά πλάτος σήματα έχουν γωνία  $\omega_c t$  και περιβάλλουσα ανάλογη με το πληροφοριακό σήμα, τα διαμορφωμένα κατά γωνία σήματα έχουν σταθερό πλάτος  $A_c$  και γωνία που μεταβάλλεται ανάλογα με το πληροφοριακό σήμα. Σημειώνεται ότι για τα σήματα *FM* και *PM*, που είναι διαμορφωμένα από ημιτονοειδές σήμα, η διαφορά τους δεν είναι δυνατόν να διακριθεί, ενώ, αν το πληροφοριακό σήμα είναι σχήματος παλμού, η "πληροφορία" είναι κρυμμένη στα περάσματα από το μηδέν (*zero crossing*).

Η βασική διαφορά της γωνιακής διαμόρφωσης από τη διαμόρφωση πλάτους είναι ότι ενώ η διαμόρφωση πλάτους είναι μια διαδικασία **γραμμική**, η διαμόρφωση γωνίας είναι **μη γραμμική**, γεγονός που οδηγεί σε διαπλάτυνση του φάσματος του διαμορφωμένου κατά γωνία σήματος. Η μη γραμμική φύση της διαμόρφωσης γωνίας μπορεί να αποκαλυφθεί αν οι εξισώσεις (4.1) και (4.2) τεθούν στη γενική μορφή:

$$x(t) = \text{Re}\left\{A_c e^{i\theta(t)}\right\} = \text{Re}\left\{A_c e^{i\omega_c t} e^{ikf(t)}\right\} \quad (4.7)$$

όπου με  $\text{Re}[x]$  συμβολίζεται το πραγματικό μέρος του  $x$ ,  $k = k_p$  και  $f(t) = m(t)$  για την περίπτωση *PM* ή  $k = k_\omega$  και  $f(t) = \int_0^t m(t') dt'$  για την *FM*. Αναπτύσσοντας σε σειρά *Taylor* τη συνάρτηση  $\exp[ikf(t)]$  η εξίσωση (4.7) δίνει:

$$x(t) = \text{Re}\left\{A_c e^{i\omega_c t} \left[1 + ikf(t) - \frac{1}{2!} k^2 f^2(t) - \frac{i}{3!} k^3 f^3(t) + \dots\right]\right\} \quad (4.8)$$

που σημαίνει ότι με την εξαίρεση της περίπτωσης:

$$|kf(t)| \ll 1 \quad (4.9)$$

η διαμόρφωση γωνίας είναι πράγματι μια μη γραμμική διαδικασία. Η δυσκολία, που εισάγει η μη γραμμική φύση της γωνιακής διαμόρφωσης για τη μελέτη τυχαίων πληροφοριακών σημάτων  $m(t)$ , οδηγεί στην ανάγκη να μελετηθεί η διαμόρφωση γωνίας στην περίπτωση, που το πληροφοριακό σήμα  $m(t)$  είναι ημιτονοειδούς μορφής. Έτσι, από τώρα και στο εξής, θεωρείται:

$$m(t) = a \cos(\omega_m t) \quad (4.10)$$

όπου  $a$  και  $\omega_m$  είναι το πλάτος και η γωνιακή συχνότητα του πληροφοριακού σήματος, αντίστοιχα (εννοείται φυσικά ότι  $\omega_m \ll \omega_c$  για να έχει νόημα η διαμόρφωση). Στην

περίπτωση τώρα, που το σήμα της εξίσωσης (4.10) διαμορφώνει κατά συχνότητα το φορέα  $A_c \cos(\omega_c t)$ , η εξίσωση (4.2) θα δίνει τη μορφή του διαμορφωμένου σήματος, ενώ η εξίσωση (4.6) θα δίνει τη στιγμιαία του γωνία. Έτσι, μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι στην περίπτωση αυτή:

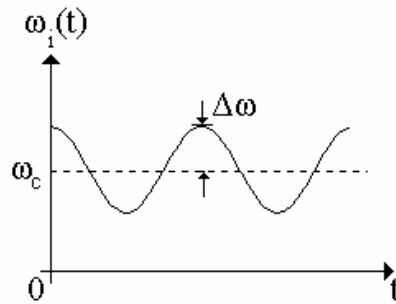
$$\omega_i(t) = \omega_c + k_\omega a \cos(\omega_m t) \quad (4.11)$$

$$\text{Ορίζοντας την παράμετρο } \Delta\omega \text{ ως: } \Delta\omega = k_\omega a \quad (4.12)$$

η εξίσωση (4.11) γράφεται:

$$\omega_i(t) = \omega_c + (\Delta\omega) \cos(\omega_m t) \quad (4.13)$$

Γίνεται αμέσως φανερό ότι η παράμετρος  $\Delta\omega$  είναι η **μέγιστη απόκλιση συχνότητας** του διαμορφωμένου σήματος από τη συχνότητα του φορέα (Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2. Η στιγμιαία συχνότητα του σήματος FM για ημιτονοειδή πληροφορία.

Από την άλλη πλευρά, η στιγμιαία γωνία του διαμορφωμένου σήματος είναι:

$$\theta(t) = \omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin(\omega_m t) = \omega_c t + \beta \sin(\omega_m t) \quad (4.14)$$

όπου η παράμετρος  $\beta$ , που είναι ο λόγος της μέγιστης απόκλισης συχνότητας προς τη διαμορφώνουσα συχνότητα, δίνεται από τη σχέση:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \quad (4.15)$$

και ονομάζεται **δείκτης διαμόρφωσης FM**. Προφανώς, το  $\beta$  δείχνει τη μέγιστη απόκλιση φάσης του διαμορφωμένου σήματος από το  $\omega_c t$ , δηλαδή τη στιγμιαία γωνία του αδιαμόρφωτου φορέα. Στην επόμενη παράγραφο, θα βρεθεί ότι το εύρος ζώνης του

διαμορφωμένου κατά συχνότητα σήματος εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει η παράμετρος  $\beta$ .

## 4.2 Διαμόρφωση Συχνότητας Στενής Ζώνης (*Narrow Band FM, NBFM*)

Η έκφραση του διαμορφωμένου κατά συχνότητα σήματος στο πεδίο του χρόνου, όταν το πληροφοριακό σήμα είναι ημιτονοειδούς μορφής (εξίσωση (4.10)) μπορεί να βρεθεί εύκολα συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.2) και (4.14). Έτσι είναι:

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)] \quad (4.16)$$

που μπορεί να γραφεί και στη μορφή της εξίσωσης (4.8):

$$x_{FM}(t) = \text{Re} \left\{ A_c e^{i\omega_c t} \left[ 1 + i\beta \sin(\omega_m t) - \frac{1}{2!} \beta^2 \sin^2(\omega_m t) - \frac{i}{3!} \beta^3 \sin^3(\omega_m t) + \dots \right] \right\} \quad (4.17)$$

Από την έκφραση (4.17) είναι προφανές ότι το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος εξαρτάται από τις τιμές του δείκτη διαμόρφωσης  $\beta$ . Για μικρές τιμές του  $\beta$  μόνο ο σταθερός και ο πρώτης τάξης όρος του αναπτύγματος *Taylor* έχουν μη αμελητέα τιμή. Στην περίπτωση αυτή, όπως θα γίνει φανερό σε λίγο, το εύρος ζώνης του σήματος  $x_{FM}(t)$  είναι  $2\omega_m$  και ονομάζεται **διαμόρφωση συχνότητας στενής ζώνης**. Καθώς η τιμή του  $\beta$  αυξάνεται όλο και περισσότεροι όροι του αναπτύγματος *Taylor* έχουν μη αμελητέα τιμή με αποτέλεσμα την αντίστοιχη αύξηση του εύρους ζώνης του σήματος  $x_{FM}(t)$ . Η περίπτωση αυτή αναφέρεται σαν **διαμόρφωση συχνότητας ευρείας ζώνης**.

Για μικρές τιμές του  $\beta$ , συνήθως για  $\beta < 1/\sqrt{10}$ , οι όροι τάξης μεγαλύτερης του ένα είναι αμελητέοι. Στην περίπτωση αυτή (*NBFM*) η εξίσωση (4.17) δίνει:

$$x_{NBFM}(t) = \text{Re} \left\{ A_c e^{i\omega_c t} [1 + i\beta \sin(\omega_m t)] \right\}$$

$$\text{ή} \quad x_{NBFM}(t) = A_c \cos(\omega_c t) - \beta A_c \sin(\omega_m t) \sin(\omega_c t) \quad (4.18)$$

Η έκφραση (4.18) είναι η μορφή του *NBFM* σήματος στο πεδίο του χρόνου. Στη συνέχεια, θα εξεταστεί η μορφή, που έχει το σήμα *NBFM*, στο πεδίο της συχνότητας. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η εξίσωση (4.18) μοιάζει πολύ με τη μορφή ενός

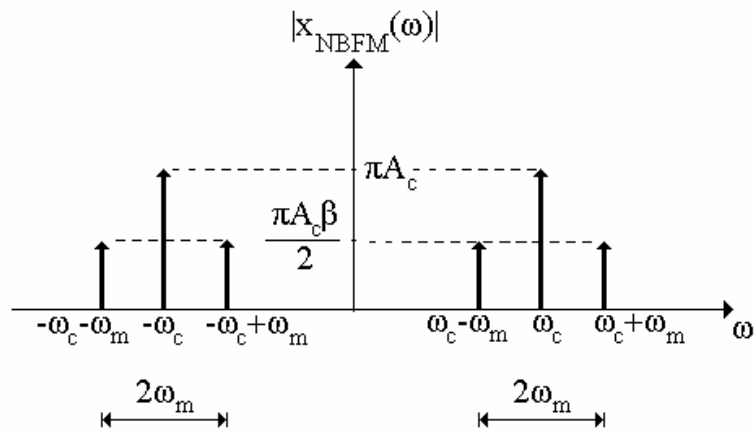
σήματος  $AM$ , του οποίου η μορφή για ημιτονοειδές πληροφοριακό σήμα  $m(t) = \beta \sin(\omega_m t)$  είναι:

$$x_{AM}(t) = A_c [1 + m(t)] \cos(\omega_c t) = A_c \cos(\omega_c t) + A_c \beta \sin(\omega_m t) \cos(\omega_c t) \quad (4.19)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του Μ/Σ *Fourier*, ο Μ/Σ *Fourier* του σήματος  $x_{NBFM}(t)$  δίνεται από τη σχέση:

$$X_{NBFM}(\omega) = \pi A_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] - \frac{i\pi A_c \beta}{2} [\delta(\omega - \omega_m - \omega_c) + \delta(\omega - \omega_m + \omega_c) - \delta(\omega + \omega_m - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_m + \omega_c)] \quad (4.20)$$

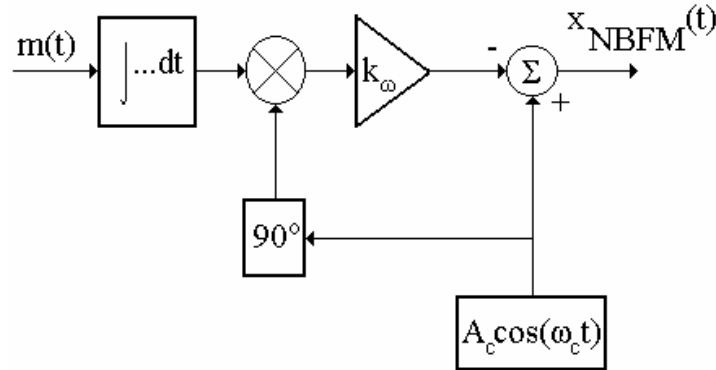
του οποίου η μορφή του μέτρου δίνεται στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3 Το μέτρο του φάσματος του διαμορφωμένου σήματος  $NBFM$ .

Η ομοιότητα του σήματος  $NBFM$  με το σήμα  $AM$  στο πεδίο της συχνότητας είναι πλέον ολοφάνερη. Ο αναγνώστης μπορεί να διαπιστώσει εύκολα τόσο από την εξίσωση (4.20) όσο και από το Σχήμα 4.3, ότι το εύρος ζώνης του σήματος  $NBFM$  είναι  $2\omega_m$ , όπως ακριβώς και για τη διαμόρφωση  $AM$ . Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι τα συμπεράσματα, που προκύπτουν για ημιτονοειδές πληροφοριακό σήμα, επεκτείνονται και στην περίπτωση τυχαίου πληροφοριακού σήματος εύρους ζώνης  $\omega_m$ . Η απόδειξη αυτή αφήνεται στον αναγνώστη ως άσκηση.

Η εξίσωση (4.18) δείχνει τον τρόπο, με τον οποίο μπορεί να υλοποιηθεί ένας διαμορφωτής *NBFM*. Ένας τέτοιος διαμορφωτής δίνεται στο Σχήμα 4.4 και είναι παρόμοιος με τον ισορροπημένο διαμορφωτή πλάτους.



Σχήμα 4.4. Ο διαμορφωτής συχνότητας στενής ζώνης.

Η γραμμική φύση της διαμόρφωσης *NBFM* παύει να υφίσταται, όταν το  $\beta$  αρχίζει και παίρνει τιμές της τάξης της μονάδας ή και μεγαλύτερες. Η περίπτωση αυτή, που ονομάζεται **διαμόρφωση συχνότητας ευρείας ζώνης (*WBFM*)**, θα εξεταστεί στην επόμενη παράγραφο.

### 4.3 Διαμόρφωση Συχνότητας Ευρείας Ζώνης (*Wide Band FM, WBFM*)

Υπενθυμίζεται ότι η μορφή ενός διαμορφωμένου κατά συχνότητα σήματος, ανεξάρτητα από τις τιμές που παίρνει ο δείκτης διαμόρφωσης  $\beta$ , και για ημιτονοειδές πληροφοριακό σήμα, είναι η ακόλουθη:

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)] \quad (4.21)$$

η οποία μπορεί να γραφεί και στη μορφή:

$$x_{FM}(t) = A_c \{ \cos(\omega_c t) \cos[\beta \sin(\omega_m t)] - \sin(\omega_c t) \sin[\beta \sin(\omega_m t)] \} \quad (4.22)$$

Παρατηρώντας τους όρους  $\cos[\beta \sin(\omega_m t)]$  και  $\sin[\beta \sin(\omega_m t)]$ , οι οποίοι εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (4.22), είναι φανερό ότι και οι δύο είναι περιοδικές συναρτήσεις γωνιακής συχνότητας  $\omega_m$  και, επομένως, μπορούν να αναπτυχθούν σε

σειρές *Fourier*, που θα έχουν θεμελιώδη συχνότητα την  $\omega_m/2\pi$ . Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνάρτηση  $\cos[\beta\sin(\omega_m t)]$  είναι άρτια, στο ανάπτυγμά της θα υπάρχουν μόνο άρτιες αρμονικές, ενώ το αντίθετο συμβαίνει για την  $\sin[\beta\sin(\omega_m t)]$ , που είναι περιττή, και στο ανάπτυγμα της θα υπάρχουν μόνο περιττές αρμονικές. Έτσι, τα αναπτύγματα των δύο αυτών συναρτήσεων είναι:

$$\begin{aligned} \cos[\beta\sin(\omega_m t)] = & J_0(\beta) + 2J_2(\beta)\cos(2\omega_m t) + 2J_4(\beta)\cos(4\omega_m t) + \dots \\ & + 2J_{2n}(\beta)\cos(2n\omega_m t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

και

$$\sin[\beta\sin(\omega_m t)] = 2J_1(\beta)\sin(\omega_m t) + 2J_3(\beta)\sin(3\omega_m t) + \dots + 2J_{2n-1}(\beta)\sin[(2n-1)\omega_m t] \quad (4.24)$$

Η συνάρτηση  $J_n(\beta)$ , που υπάρχει στις εξισώσεις (4.23) και (4.24), παρουσιάζεται πολύ συχνά σε διάφορα προβλήματα της Φυσικής και ονομάζεται **συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης  $n$  και με όρισμα  $\beta$** . Στη γενική περίπτωση, τόσο το όρισμα  $\beta$  όσο και η τάξη  $n$  μπορούν να πάρουν μιγαδικές τιμές, αλλά, στην περίπτωση, που εξετάζεται εδώ το μεν όρισμα παίρνει θετικές πραγματικές τιμές, η δε τάξη παίρνει ακέραιες τιμές. Τότε, η συνάρτηση *Bessel*  $J_n(\beta)$  αποδεικνύεται ότι έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α)  $J_n(\beta)$  είναι πραγματική συνάρτηση. (4.25)

β)  $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$  (4.26)

γ)  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta) = 1$  (4.27)

Επιπλέον, όταν το όρισμα  $\beta$  είναι πολύ μικρότερο της μονάδας ( $\beta \ll 1$ ), τότε ισχύουν οι παρακάτω προσεγγιστικές σχέσεις:

δ)  $J_0(\beta) \cong 1 - (\beta/2)^2$  (4.28)

ε)  $J_n(\beta) \cong \frac{1}{n!} (\beta/2)^n$ ,  $n \neq 0$  (4.29)

Μετά τη μικρή αυτή παρένθεση, η μορφή, που έχει στη γενική περίπτωση το σήμα *FM*, βρίσκεται αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (4.23) και (4.24) στην εξίσωση (4.22) και χρησιμοποιώντας τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες:



$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos(A - B) + \frac{1}{2} \cos(A + B) \quad (4.30)$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \cos(A - B) - \frac{1}{2} \cos(A + B) \quad (4.31)$$

οπότε:

$$\begin{aligned} x_{FM}(t) = A_c \{ & J_0(\beta) \cos(\omega_c t) - J_1(\beta) [\cos((\omega_c - \omega_m)t) - \cos((\omega_c + \omega_m)t)] \\ & + J_2(\beta) [\cos((\omega_c - 2\omega_m)t) + \cos((\omega_c + 2\omega_m)t)] \\ & - J_3(\beta) [\cos((\omega_c - 3\omega_m)t) - \cos((\omega_c + 3\omega_m)t)] + \dots \} \end{aligned} \quad (4.32)$$

η οποία γράφεται και στην ακόλουθη πιο βολική μορφή:

$$x_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos[(\omega_c + n\omega_m)t] \quad (4.33)$$

Το αποτέλεσμα της σχέσης (4.32) (ή της (4.33)) οδηγεί στα ακόλουθα συμπεράσματα όσον αφορά το **φάσμα του σήματος (WB)FM**:

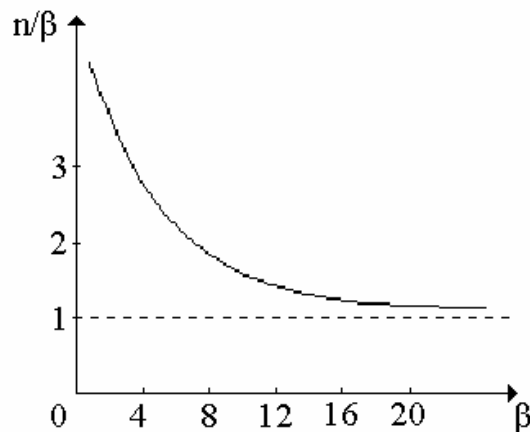
- i) Το φάσμα του σήματος *FM* αποτελείται από ένα άπειρο πλήθος φασματικών συνιστωσών, μια από τις οποίες αντιστοιχεί στο φορέα (συχνότητα  $\omega_c$ ) και άπειρες πλευρικές φασματικές συνιστώσες στις συχνότητες  $\omega_c \pm n\omega_m$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).
- ii) Το πλάτος των φασματικών συνιστωσών εξαρτάται από τις τιμές της συνάρτησης  $J_n(\beta)$ . Το πλάτος της φασματικής συνιστώσας του φορέα είναι  $J_0(\beta)$ , ενώ το πλάτος της  $\omega_c \pm n\omega_m$  φασματικής συνιστώσας είναι  $J_n(\beta)$ . Από τους σχετικούς πίνακες γίνεται φανερό ότι όσο αυξάνεται το  $n$  (δηλαδή η τάξη της αντίστοιχης αρμονικής), τόσο η  $J_n(\beta)$  (δηλαδή το μέγεθος των αντίστοιχων αρμονικών) μειώνεται. Έτσι, πρακτικά οι υψηλής τάξης αρμονικές μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες, με την έννοια ότι το σύνολο της ισχύος του σήματος *FM* είναι συγκεντρωμένο σε πεπερασμένο εύρος συχνοτήτων, που εξαρτάται βέβαια από την παράμετρο  $\beta$ .
- iii) Όταν  $\beta \ll 1$ , δηλαδή στην περίπτωση του *NBFM*, η εξίσωση (4.32) συμπίπτει με την (4.18). Αυτό αποδεικνύει ότι για  $\beta \ll 1$  το *WBFM* "εκφυλίζεται" στο *NBFM*.

Όπως φάνηκε από το δεύτερο (ii) συμπέρασμα σχετικά με το φάσμα του σήματος *FM*, για οσοδήποτε μεγάλες τιμές του  $\beta$  το φάσμα μπορεί (αν και θεωρητικά άπειρο) να

θεωρείται πεπερασμένο. Το ερώτημα, βέβαια, το οποίο τίθεται είναι πόσες πλευρικές φασματικές συνιστώσες χρειάζονται προκειμένου να υπάρχει πιστότητα στην αναπαραγωγή του σήματος. Ένας πρακτικός τρόπος, ο οποίος δείχνει πόσες πλευρικές φασματικές συνιστώσες πρέπει να συμπεριλαμβάνονται στο φάσμα του FM, είναι ο ακόλουθος: Αρχικά, υποτίθεται μια πλευρική συνιστώσα σημαντική, εφόσον υπερβαίνει κατά μέγεθος το 1% του αδιαμόρφωτου φορέα, δηλαδή εφόσον:

$$|J_n(\beta)| \geq 0.01 \text{ (για ευκολία θεωρείται } A_c = 1) \quad (4.34)$$

Από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $J_n(\beta)$  για διάφορες τιμές του  $\beta$  (βλέπε ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α στο τέλος του τρέχοντος κεφαλαίου), προκύπτει ότι η  $J_n(\beta)$  ελαττώνεται πολύ γρήγορα, όταν  $n > \beta$ . Φαίνεται, ιδιαίτερα, χρήσιμη η καμπύλη του Σχήματος 4.5, όπου έχει σχεδιαστεί ο λόγος  $n/\beta$  συναρτήσει του  $\beta$ , ώστε  $J_n(\beta) \geq 0.01$ .



Σχήμα 4.5. Ο λόγος  $n/\beta$  σαν συνάρτηση του  $\beta$ .

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.5 το εύρος ζώνης  $B$  του σήματος FM μπορεί να προσεγγιστεί για μεγάλες τιμές του  $\beta$ , θεωρώντας σαν τελευταία σημαντική συνιστώσα τη συνιστώσα τάξης  $n = [\beta]$  (το σύμβολο  $[\beta]$  συμβολίζει το ακέραιο μέρος του  $\beta$ ),

$$B = 2n\omega_m \cong 2\beta\omega_m = 2(\Delta\omega) \text{ (μεγάλες τιμές του } \beta) \quad (4.35)$$

όπου  $(\Delta\omega)$  είναι η μέγιστη απόκλιση συχνότητας (βλέπε σχέσεις (4.12) και (4.15)).

Για πολύ μικρές τιμές του  $\beta$  ( $\beta < 1/\sqrt{10}$ ), τόσο από το Σχήμα 4.5 όσο και από τις ταυτότητες (4.28) και (4.29) και την έκφραση (4.32), προκύπτει ότι οι μόνες σημαντικές

(από άποψη μεγέθους) συναρτήσεις *Bessel* είναι οι  $J_0(\beta)$  και  $J_1(\beta)$ . Στην περίπτωση αυτή (*NBFM*) το εύρος ζώνης του σήματος *FM* είναι:

$$B = 2\omega_m \text{ (μικρές τιμές του } \beta) \quad (4.36)$$

Οι σχέσεις (4.35) και (4.36), οι οποίες εκφράζουν το εύρος ζώνης στις οριακές περιπτώσεις της παραμέτρου  $\beta$ , μπορούν τώρα να ενοποιηθούν ως εξής:

$$B = 2[(\Delta\omega) + \omega_m] = 2\omega_m(1 + \beta) \quad (4.37)$$

Η εξίσωση (4.37) είναι γνωστή σαν ο **κανόνας του Carson** και δίνει τα αναμενόμενα αποτελέσματα για πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές τιμές του  $\beta$  και υιοθετείται για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\beta$ . Το εύρος ζώνης, όπως προκύπτει από τον κανόνα αυτόν, είναι πάντα μικρότερο από αυτό που προκύπτει θεωρώντας το κριτήριο  $|J_n(\beta)| \leq 0.01$ . Το μέγιστο λάθος, κατά τον υπολογισμό του εύρους ζώνης με χρήση της εξίσωσης (4.37), προκύπτει για τιμές του  $\beta$  στην περιοχή της μονάδας, χωρίς όμως ποτέ η φασματική ισχύς των φασματικών συνιστωσών, που παραλείπονται, να υπερβαίνει το 1%. Τέλος, σημειώνεται ότι ο προσεγγιστικός τρόπος της εύρεσης του εύρους ζώνης του *FM* σήματος, όταν το πληροφοριακό σήμα είναι ημιτονοειδές, με τον κανόνα αυτόν επεκτείνεται και στην περίπτωση του τυχαίου πληροφοριακού σήματος, όπου βέβαια ως  $\omega_m$  στην εξίσωση (4.37) θεωρείται το εύρος ζώνης του πληροφοριακού σήματος. Στη συνέχεια, θα υπολογιστεί η **μέση ισχύς** του σήματος *FM*.

Όταν το πληροφοριακό σήμα είναι ημιτονοειδούς μορφής, υπενθυμίζεται ότι το διαμορφωμένο κατά συχνότητα σήμα δίνεται από τη σχέση:

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)] = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos[(\omega_c + n\omega_m)t] \quad (4.38)$$

Λόγω της ορθογωνιότητας των συνημιτονοειδών όρων, η μέση ισχύς του σήματος θα

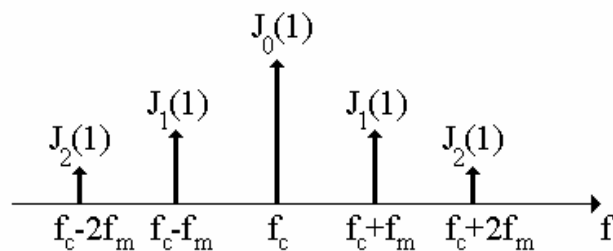
$$\text{είναι: } \overline{P_{FM}} = \overline{x_{FM}^2(t)} = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta) \quad (4.39)$$

και λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα (4.27) των συναρτήσεων *Bessel*, η εξίσωση (4.38) δίνει:

$$\overline{P_{FM}} = A_c^2/2 \quad (4.40)$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι, αντίθετα με την περίπτωση της διαμόρφωσης πλάτους, η ισχύς των σημάτων, τα οποία είναι διαμορφωμένα κατά συχνότητα, είναι σταθερή και ίση με αυτήν του αδιαμόρφωτου φορέα. Αυτό συμβαίνει γιατί καθώς το  $\beta$  αλλάζει (λόγω της μεταβολής του  $k_{\omega}$ ), η ισχύς απλώς ανακατανέμεται στις πλευρικές ζώνες, χωρίς να μεταβάλλεται η συνολική της τιμή. Πέραν όμως αυτής της μαθηματικής εξήγησης, ο αναγνώστης πρέπει να έχει παρατηρήσει (βλέπε Σχήμα 4.1) ότι το πλάτος ενός σήματος *FM* είναι σταθερό και, επομένως, το ίδιο πρέπει να περιμένει κανείς και για την ισχύ του.

Χρήσιμο είναι να υπολογίσει κανείς, το πως κατανέμεται η ισχύς στις διάφορες φασματικές συνιστώσες. Έστω ένα σήμα *FM* με πλάτος  $A_c = 1$  και  $\beta = 1$  (όπου το πληροφοριακό σήμα θεωρείται ημιτονοειδές). Η μέση ισχύς του σήματος αυτού είναι (από την (4.40)) ίση με  $1/2$ . Επειδή  $\beta = 1$ , από τον κανόνα του *Carson* βλέπει κανείς ότι μόνο  $\beta + 1 = 2$  φασματικές συνιστώσες συνεισφέρουν ουσιαστικά στο φάσμα του σήματος *FM*, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.6. Το φάσμα ενός σήματος *FM* με  $\beta = 1$ .

Από τον πίνακα τιμών των συναρτήσεων *Bessel* (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α), λαμβάνονται οι εξής τιμές:  $J_0(1) \cong 0.765$ ,  $J_1(1) \cong 0.440$  και  $J_2(1) \cong 0.115$ , οπότε η ισχύς του σήματος της εξίσωσης (4.39) γράφεται:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} J_0^2(1) + J_1^2(1) + J_2^2(1) = 0.289 + 0.193 + 0.013 = 0.495 \quad (4.41)$$

Το άθροισμα 0.495 είναι το 99% της πραγματικής ισχύος του σήματος *FM* που είναι 0.5, όπως ήδη έχει αναφερθεί. Το λάθος αυτό οφείλεται, στο γεγονός ότι ο κανόνας του *Carson*, που χρησιμοποιήθηκε, είναι προσεγγιστικός.

Αξίζει, τέλος, να τονιστεί ότι με κατάλληλη ρύθμιση του δείκτη διαμόρφωσης, μπορεί κανείς να καταστήσει οσοδήποτε μικρή οποιαδήποτε πλευρική συνιστώσα ή ακόμα και το φορέα. Χρήσιμο εδώ είναι να παρατηρηθεί για τις τιμές  $\beta = 2.4, 5.52, \dots$  η συνάρτηση *Bessel* μηδενικής τάξης μηδενίζεται [ $J_0(2.4) = J_0(5.52) = 0$ ], με αποτέλεσμα όλη η ισχύς να κατανέμεται στις πλευρικές ζώνες.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ένα φέρον σήμα συχνότητας 1 GHz διαμορφώνεται κατά συχνότητα από ένα ημιτονοειδές σήμα 10 kHz, έτσι ώστε η μέγιστη απόκλιση συχνότητας να είναι 1 kHz. Να προσδιοριστούν:

- α) Το εύρος ζώνης του σήματος *FM*.
- β) Το εύρος ζώνης του σήματος *FM*, αν το πλάτος του διαμορφώνοντος σήματος διπλασιαστεί.
- γ) Το εύρος ζώνης του σήματος *FM*, αν η συχνότητα του διαμορφώνοντος σήματος διπλασιαστεί.
- δ) Το εύρος ζώνης του σήματος *FM*, αν και η συχνότητα και το πλάτος του διαμορφώνοντος σήματος διπλασιαστούν.

### Απάντηση

Το εύρος ζώνης του σήματος *FM* προσδιορίζεται από τον κανόνα του *Carson* σαν  $B = 2[(\Delta\omega) + \omega_m] = 2\omega_m(\beta + 1)$ . Τότε:

α) Όταν  $f_m = 10$  kHz και  $\Delta f = 1$  kHz,  $B = 2(10+1) = 22$  kHz. Εναλλακτικά, μπορεί να υπολογιστεί ο δείκτης διαμόρφωσης  $\beta$  από τη σχέση  $\beta = \Delta f/f_m$  και να βρεθεί το  $B = 2f_m(\beta + 1) = 22$  kHz.

β) Όταν το πλάτος  $a$  του διαμορφώνοντος σήματος διπλασιαστεί, τότε και η μέγιστη απόκλιση συχνότητας  $\Delta f = k_f a$  διπλασιάζεται, με αποτέλεσμα να διπλασιαστεί και ο δείκτης διαμόρφωσης  $\beta$  και γίνεται  $\beta_2 = 2 \times 0.1 = 0.2$ . Άρα, το εύρος ζώνης γίνεται  $B = 2f_m(\beta_2 + 1) = 2 \times 10 \times 1.2 = 24$  kHz.

γ) Στην περίπτωση αυτή, υποδιπλασιάζεται ο δείκτης διαμόρφωσης, γιατί  $\beta_3 = \Delta f/2f_m$ . Έτσι τώρα  $\beta_3 = 0.05$  και  $B = 2 \times 2f_m(\beta_3 + 1) = 4 \times 10 \times 1.05 = 42$  kHz.

δ) Αν ταυτόχρονα διπλασιαστούν και το πλάτος και η συχνότητα του διαμορφώνοντος σήματος, τότε το  $\beta$  δεν αλλάζει, με αποτέλεσμα το εύρος ζώνης να είναι  $B = 2 \times 2f_m(\beta + 1) = 4 \times 10 \times 1.1 = 44$  kHz.

2. Ένα σήμα FM δίνεται από τη σχέση:  $f(t) = 20\cos[2\pi \times 10^7 t + 10\sin(2\pi \times 10^3 t)]$  [V] και εφαρμόζεται σε μια αντίσταση  $R = 50 \Omega$ . Να προσδιοριστούν:

- α) Η μέση ισχύς.
- β) Το ποσοστό της ισχύος που κατανέμεται στη συχνότητα των 10 MHz.
- γ) Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας.
- δ) Το εύρος ζώνης του σήματος.

**Απάντηση**

Για το σήμα  $f(t)$  δίνονται:  $f_c = 10$  MHz,  $f_m = 1$  kHz,  $\beta = 10$  και  $A_c = 20$  V. Έτσι:

α) Η μέση ισχύς του σήματος που καταναλώνεται σε αντίσταση  $R = 50 \Omega$  είναι:

$$\bar{P} = \frac{A_c^2}{2R} = 4 \text{ W} .$$

β) Η κατανομή ισχύος στις διάφορες φασματικές συνιστώσες έχει ως εξής:

Συχνότητα	Ισχύς
$f_c$	$ J_0(\beta) ^2 \bar{P}$
$f_c \pm f_m$	$ J_1(\beta) ^2 \bar{P}$
...	...
$f_c \pm n f_m$	$ J_n(\beta) ^2 \bar{P}$

Άρα, στη συχνότητα των 10 MHz, που είναι η φέρουσα συχνότητα, έχει καταναμεθεί ισχύς ίση με:  $P = \bar{P}|J_0(\beta)|^2 = 4J_0^2(10) = 0.242 \text{ W}$ . Σημειώνεται ότι χρησιμοποιήθηκε από τους πίνακες  $J_0(10) = -0.2459$ .

γ) Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι:  $\Delta f = \beta f_m = 10 \times 1 = 10 \text{ kHz}$ .

δ) Το εύρος ζώνης του σήματος  $f(t)$  είναι:  $B = 2f_m(\beta + 1) = 2 \times 1 \times 11 = 22 \text{ kHz}$ .

3. Ένα φέρον σήμα διαμορφώνεται κατά συχνότητα από δύο ημιτονοειδή σήματα, ώστε να παραχθεί το σήμα:  $\varphi(t) = A \cos[\omega_c t + \beta_1 \sin(\omega_1 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t)]$ , όπου  $A$  ένας πραγματικός αριθμός. Να προσδιοριστεί το φάσμα του σήματος  $\varphi(t)$ , αν είναι γνωστή η

$$\text{ταυτότητα: } \exp[i\beta \sin(\omega t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \exp(in\omega t).$$

### Απάντηση

Επειδή  $A \in \mathfrak{R}$  θα είναι:  $\varphi(t) = A \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega_c t} e^{i\beta_1 \sin(\omega_1 t)} e^{i\beta_2 \sin(\omega_2 t)} \right\}$ , και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα, που δίνεται στην εκφώνηση, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega_c t} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta_1) e^{in\omega_1 t} \right] \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(\beta_2) e^{im\omega_2 t} \right] \right\} \\ &= A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\omega_c t + n\omega_1 t + m\omega_2 t)} \right\} \\ &= A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) \cos[(\omega_c + n\omega_1 + m\omega_2)t] \end{aligned}$$

Από την τελευταία έκφραση είναι φανερό ότι το σύνθετο σήμα έχει φασματικές συνιστώσες στις συχνότητες  $\omega_c + n\omega_1 + m\omega_2$ , με  $n$  και  $m$  ακέραιους. Η μορφή του είναι ανάλογη με εκείνη ενός σήματος  $FM$  και ζητείται από τον αναγνώστη να σχεδιάσει πρόχειρα το φάσμα αυτό.

4. Ο επιθυμητός δείκτης διαμόρφωσης μιας ζεύξης  $FM$  είναι μεγαλύτερος του 3, ενώ η φέρουσα συχνότητα μεταφέρει μηδενική ισχύ. Αν το εύρος ζώνης του σήματος

διαμόρφωσης είναι  $f_m = 5$  kHz, να προσδιοριστεί το εύρος ζώνης ραδιοσυχνοτήτων της ζεύξης.

### Απάντηση

Αφού η ισχύς της φέρουσας συχνότητας είναι μηδενική, έπεται ότι έχει επιλεγεί κάποιο  $\beta$  έτσι ώστε  $J_0(\beta) = 0$ , δηλαδή κάποια από τις τιμές  $\beta = 2.4, 5.52$  κ.λ.π. Αφού η παράμετρος  $\beta$  πρέπει να είναι μεγαλύτερη του 3, αλλά ταυτόχρονα δεν θέλουμε να διαπλατυνθεί υπερβολικά το εύρος ζώνης ραδιοσυχνοτήτων, πρέπει  $\beta = 5.52$ . Άρα, το εύρος ζώνης είναι  $B = 2 \times 5 \times (1 + 5.52) = 65.2$  kHz.

5. Ένας πομπός FM διαμορφώνεται από ένα ημιτονοειδές σήμα. Η ισχύς εξόδου, όταν δεν υπάρχει διαμόρφωση, είναι 100 W, ενώ η κεραία του πομπού αντιστοιχεί σε αντίσταση 50 Ω. Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας αυξάνεται βαθμιαία από τη μηδενική τιμή μέχρι η πρώτη πλευρική της εξόδου να γίνει μηδενική. Να προσδιοριστούν:

- α) Η μέση ισχύς που μεταφέρει η φέρουσα συχνότητα
- β) Η μέση ισχύς που μεταφέρουν οι πλευρικές συχνότητες.

### Απάντηση

Όπως δίνεται από το πρόβλημα ο δείκτης διαμόρφωσης ρυθμίζεται στην τιμή  $\beta = 3.8$ , η οποία είναι η πρώτη ρίζα της συνάρτησης  $J_1(\beta)$ . Έτσι, η ισχύς, που κατανέμεται στην πρώτη πλευρική συχνότητα (δηλαδή στις συχνότητες  $f_c \pm f_m$ ), είναι μηδέν. Επομένως, η ισχύς, που μεταφέρει η φέρουσα συχνότητα, είναι  $P_\varphi = \bar{P} J_0^2(3.8) = 100 \times 0.4^2 = 16$  W.

Τότε, η μέση ισχύς που κατανέμεται στις πλευρικές συχνότητες  $f_c \pm n f_m$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) είναι  $P_{\pi\lambda} = (100 - 16) = 84$  W και η ισχύς, που μεταφέρει, η δεύτερη πλευρική συχνότητα είναι  $P_2 = \bar{P} [J_2^2(3.8) + J_{-2}^2(3.8)] = 2\bar{P} J_2^2(3.8) \cong 34$  W, όπου έχει ληφθεί υπόψη ότι  $J_2(3.8) \cong 0.41$ .

6. Ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 10 kHz διαμορφώνει δύο διαμορφωτές FM, των οποίων τα αδιαμόρφωτα φέροντα έχουν συχνότητες 3 MHz και 3.04 MHz, αντίστοιχα. Οι διαμορφωτές είναι εντελώς όμοιοι ως προς τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά



τους, ενώ ο δείκτης διαμόρφωσης και για τα δύο σήματα  $FM$ , που αθροιζόμενα αποτελούν το συνολικό διαμορφωμένο σήμα  $RF$ , είναι 2.

- α) Να εκτιμηθεί το εύρος ζώνης συχνοτήτων  $RF$ , που απαιτείται για τη μετάδοση του σύνθετου σήματος που εκπέμπει ο πομπός.
- β) Να σχεδιαστεί το μέτρο του φάσματος του σύνθετου φάσματος  $RF$ .

### Απάντηση

Τα δύο σήματα που αποτελούν το σύνθετο σήμα  $FM$  είναι:

$$c_1(t) = A_c \cos[2\pi \times 3 \times 10^6 t + 2\sin(2\pi \times 10 \times 10^3 t)]$$

και

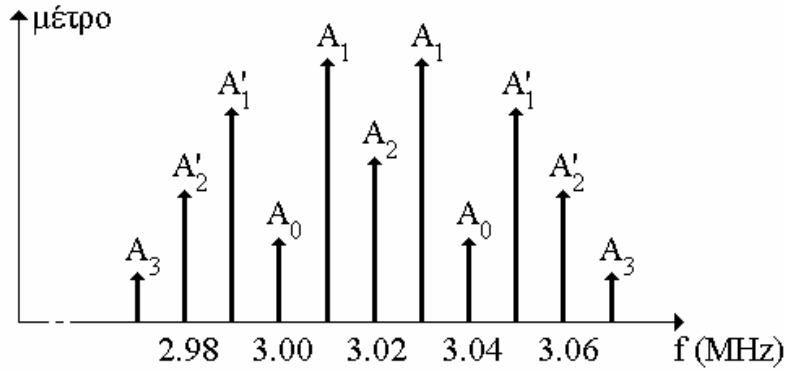
$$c_2(t) = A_c \cos[2\pi \times 3.04 \times 10^6 t + 2\sin(2\pi \times 10 \times 10^3 t)].$$

Το εύρος ζώνης, που απαιτείται για τη μετάδοση μόνο του  $c_1(t)$  ή μόνο του  $c_2(t)$ , είναι:

$$B = 2(1+2)10 = 60 \text{ kHz.}$$

Συχνότητα σε MHz	Πλάτος	Συμβολισμός στο Σχήμα
3.00 - 3.04	$J_0(2)$	$A_0$
3.03 - 3.01	$J_1(2) + J_3(2)$	$A_1$
3.02	$2J_2(2)$	$A_2$
2.99 - 3.05	$J_1(2)$	$A'_1$
2.98 - 3.06	$J_2(2)$	$A'_2$
2.97 - 3.07	$J_3(2)$	$A'_3$

Είναι φανερό ότι, το πρώτο σήμα μεταδίδεται στην περιοχή συχνοτήτων (3000-30, 3000+30) kHz, ενώ το δεύτερο στην (3040-30, 3040+30) kHz. Λόγω της επικάλυψης των φασμάτων των επιμέρους σημάτων  $c_1(t)$  και  $c_2(t)$ , το συνολικό εύρος ζώνης συχνοτήτων είναι το εύρος συχνοτήτων μεταξύ 2970 και 3070 kHz, δηλαδή είναι 100 kHz. Τα μέτρα των φασματικών συνιστωσών δίνονται στον παραπάνω πίνακα, ενώ το μονόπλευρο φάσμα του σύνθετου σήματος έχει σχεδιαστεί στο παρακάτω σχήμα.



#### 4.4 Μέθοδοι Διαμόρφωσης & Αποδιαμόρφωσης Σημάτων FM

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι διαμορφωτές και οι αποδιαμορφωτές FM. Αρχικά, θα δοθούν οι μέθοδοι παραγωγής σημάτων FM, οι οποίες διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες: την **άμεση** και την **έμμεση μέθοδο**. Η πρώτη από αυτές χρησιμοποιείται για την απευθείας παραγωγή σημάτων *WBFM*, ενώ η δεύτερη για την παραγωγή σημάτων *NBFM*, τα οποία στη συνέχεια μετατρέπονται σε *WBFM*. Τα συστήματα της άμεσης μεθόδου κάνουν χρήση κατάλληλων διατάξεων, οι οποίες ονομάζονται **ταλαντωτές ελεγχόμενοι από τάση** (*Voltage-Controlled Oscillator, VCO*). Πρόκειται για ταλαντωτές, των οποίων η συχνότητα εξαρτάται (ελέγχεται) από το πληροφοριακό σήμα. Στις μικροκυματικές συχνότητες, οι ταλαντωτές αυτοί υλοποιούνται με τη χρήση *Klystrons* με ανακλαστήρα, ενώ σε χαμηλότερες συχνότητες χρησιμοποιούνται ανάστροφα πολωμένες ημιαγωγικές επαφές, που χρησιμοποιούνται ως πυκνωτές μεταβλητής τάσης (*Voltage-Variable Capacitors*). Σε κάθε περίπτωση, η ιδέα της άμεσης μεθόδου είναι η μεταβολή της χωρητικότητας ενός συντονισμένου κυκλώματος, π.χ. ενός παράλληλου συνδυασμού *LC*. Όπως είναι γνωστό, η συχνότητα συντονισμού ενός τέτοιου κυκλώματος είναι:

$$\omega = 1/\sqrt{LC} \quad (4.42)$$

Αν κάποια από τις παραμέτρους *L* και *C* μεταβάλλεται σύμφωνα με το πληροφοριακό σήμα *m(t)*, τότε η συχνότητα εξόδου μεταβάλλεται. Αν υποθεθεί ότι η χωρητικότητα *C* έχει τη μορφή:

$$C = C_0 - km(t) \quad (4.43)$$

τότε η συχνότητα  $\omega$  από την (4.42) θα είναι:

$$\omega = \omega_i(t) = \frac{1}{\sqrt{L[C_0 - km(t)]}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \left[ 1 - \frac{k}{C_0} m(t) \right]^{-1/2} \quad (4.44)$$

Υποθέτοντας ότι  $|(k/C_0)m(t)| \ll 1$ , τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση  $(1-x)^{-1/2} \cong 1+x/2$  (που προέρχεται από το ανάπτυγμα *Taylor* της  $(1-x)^{-1/2}$ ), οπότε η εξίσωση (4.44) γράφεται:

$$\omega_i(t) = \omega_c \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{C_0} m(t) \right] = \omega_c + k_\omega m(t) \quad (4.45)$$

όπου  $\omega_c = 1/\sqrt{LC_0}$  και  $k_\omega = k/(2C_0\omega_c)$ . Η εξίσωση (4.45) δείχνει ότι η στιγμιαία συχνότητα του σήματος εξόδου είναι ανάλογη με το πληροφοριακό σήμα, οπότε το σήμα εξόδου είναι ένα σήμα *FM*.

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, η παραγωγή ενός σήματος *NBFM* είναι σχετικά απλή. Η ιδέα λοιπόν της **έμμεσης διαμόρφωσης *FM*** βρίσκεται στην μετατροπή ενός σήματος *NBFM* σε *WBFM* με χρήση διατάξεων, οι οποίες λέγονται **πολλαπλασιαστές συχνότητας**. Οι διατάξεις αυτές είναι μη γραμμικά κυκλώματα, που επιτυγχάνουν τον πολλαπλασιασμό της συχνότητας του σήματος εισόδου με κάποιο συντελεστή. Για παράδειγμα, αν θεωρηθεί ένα ιδανικό κύκλωμα τετραγωνικού νόμου, η σχέση που συνδέει την είσοδο  $e_i(t)$  με την έξοδο  $e_o(t)$  είναι:

$$e_o(t) = ae_i^2(t) \quad (4.46)$$

Αν υποτεθεί ότι το σήμα εισόδου  $e_i(t)$  είναι ένα σήμα *FM*, δηλαδή:

$$e_i(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)] \quad (4.47)$$

η έξοδος του προαναφερθέντος δικτύου είναι:

$$e_o(t) = aA_c^2 \cos^2[\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)] = \frac{1}{2} aA_c^2 \left\{ 1 + \cos[2\omega_c + 2\beta \sin(\omega_m t)] \right\} \quad (4.48)$$

Με χρήση ενός ζωνοπερατού φίλτρου με κεντρική συχνότητα  $2\omega_c$ , η συνεχής συνιστώσα και γενικά κάθε ανεπιθύμητο φασματικό μέρος, αποκόπτεται και προκύπτει

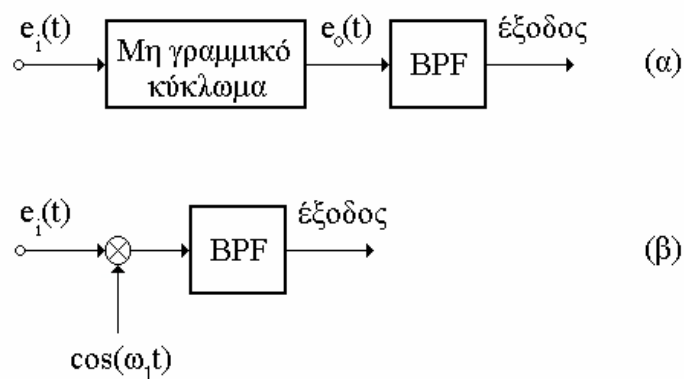
σήμα *FM* με φέρουσα συχνότητα και δείκτη διαμόρφωσης διπλάσιας τιμής αυτών της εισόδου.

Με παρόμοιο τρόπο, δηλαδή χρήση ενός κυκλώματος με νόμο:

$$e_o(t) = ae_i^n(t) \quad (4.49)$$

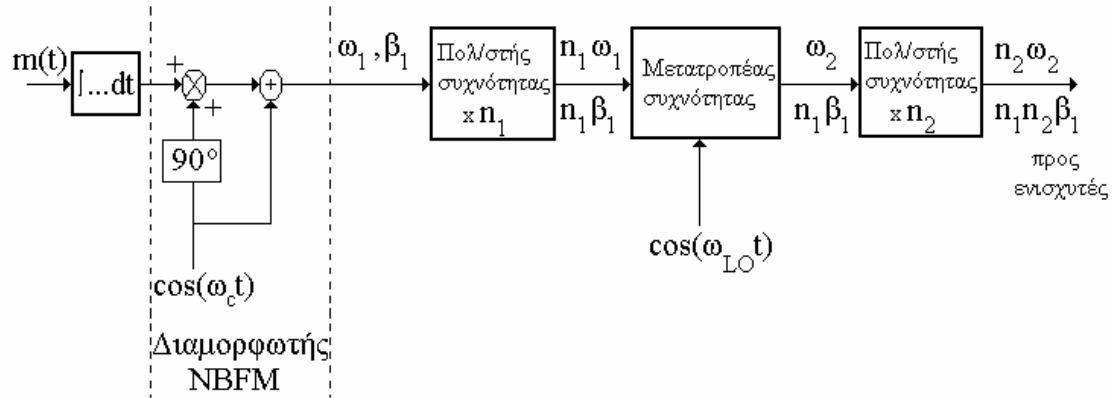
η φέρουσα συχνότητα και ο δείκτης διαμόρφωσης πολλαπλασιάζονται επί *n*. Στην πράξη μη γραμμικά κυκλώματα σαν κι αυτά, που προαναφέρθηκαν, κατασκευάζονται με χρήση ειδικών διόδων, που παράγουν πολλές αρμονικές του σήματος εισόδου. Με σωστή σχεδίαση είναι δυνατή η παραγωγή σημάτων πολλαπλασιασμένα κατά συχνότητα με τον επιθυμητό αριθμό και ενισχυμένα εκατοντάδες φορές με το μικρό τίμημα της εισαγωγής θορύβου φάσης μερικών μοιρών.

Το μειονέκτημα της έμμεσης μεθόδου είναι ότι η πραγματοποίηση υψηλού δείκτη διαμόρφωσης είναι δυνατό να οδηγήσει σε πολύ υψηλή φέρουσα συχνότητα. Για την αποφυγή του γεγονότος αυτού, μαζί με πολλαπλασιαστές χρησιμοποιούνται και μετατροπείς συχνότητας, που δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι μίκτες συχνότητας, οι οποίοι χρησιμοποιούνται και στη διαμόρφωση πλάτους. Έτσι, πραγματοποιείται απλή μετατόπιση φάσματος του σήματος εισόδου, ενώ με τον πολλαπλασιασμό συχνότητας μεταβάλλεται το περιεχόμενο του φάσματος. Η επίδραση του πολλαπλασιαστή συχνότητας (Σχήμα 4.7α) έχει σαν αποτέλεσμα τη διαπλάτυνση του φάσματος του σήματος εισόδου, καθώς κάθε φασματική συνιστώσα πολλαπλασιάζεται με όλες τις άλλες για τη δημιουργία του σήματος εξόδου. Ο μετατροπέας (Σχήμα 4.7β) απλώς μετατοπίζει το φάσμα του σήματος εισόδου γύρω από μια νέα συχνότητα  $\omega_1$ .



Σχήμα 4.7. (α) Πολλαπλασιαστής συχνότητας και (β) μετατροπέας συχνότητας.

Η μέθοδος δημιουργίας σήματος *WBFM* πολλαπλασιάζοντας κατά συχνότητα ένα σήμα *NBFM* λέγεται **έμμεση διαμόρφωση Armstrong** και το *block* διάγραμμα ενός τέτοιου πομπού δίνεται στο Σχήμα 4.8.



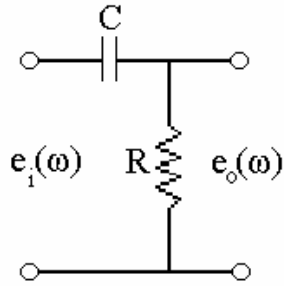
Σχήμα 4.8. Το σύστημα Armstrong για τη δημιουργία σήματος *WBFM*.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι αποδιαμόρφωσης *FM*, που σαν κοινό χαρακτηριστικό έχουν το ότι αποβλέπουν στην παραγωγή ενός σήματος ανάλογου προς τη στιγμιαία συχνότητα του σήματος εισόδου. Μια από τις περισσότερο χρησιμοποιούμενες μεθόδους αποδιαμόρφωσης *FM* είναι αυτή, που χρησιμοποιεί σαν κύριο κύκλωμα το **διευκρινιστή (discriminator)**, ο οποίος είναι ένα κύκλωμα με γραμμική συνάρτηση μεταφοράς, δηλαδή:

$$H(\omega) = i\omega \tag{4.50}$$

Λόγω της εξίσωσης (4.50) και των ιδιοτήτων του Μ/Σ *Fourier*, η έξοδος ενός τέτοιου κυκλώματος είναι η χρονική παράγωγος του σήματος εισόδου. Ο διευκρινιστής μπορεί να προσομοιωθεί με τη βοήθεια του δικτύου, που φαίνεται στο Σχήμα 4.9, με την προϋπόθεση ότι  $\omega RC \ll 1$ .

$$e_o(\omega) = e_i(\omega) \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} \Rightarrow H(\omega) \approx i\omega RC, \quad \text{για } \omega RC \ll 1$$



Σχήμα 4.9. Ο διευκρινιστής όπως προσομοιώνεται με ένα δίκτυο RC.

Έστω ότι στο διευκρινιστή εισάγεται ένα σήμα διαμορφωμένο κατά συχνότητα, που έχει τη μορφή:

$$x(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + k_\omega \int_0^t m(t') dt'\right] \quad (4.51)$$

Το πλάτος  $A_c$  του σήματος  $x(t)$  υποτίθεται ότι είναι σταθερό, αφού ακόμα και αν δεν είναι λόγω θορύβου ή παρεμβολών, προηγείται του διευκρινιστή ένα κύκλωμα περιορισμού (*limiter*), που εξασφαλίζει τη σταθερότητα του. Αφού, ο διευκρινιστής είναι στην πραγματικότητα ένα κύκλωμα διαφορίσης, η έξοδός του θα είναι:

$$e_o(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A_c [\omega_c + k_\omega m(t)] \sin\left[\omega_c t + k_\omega \int_0^t m(t') dt'\right] \quad (4.52)$$

Αν τώρα ισχύει ότι:

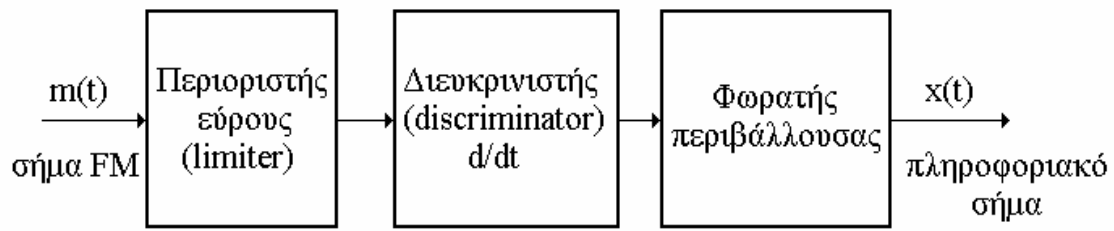
$$k_\omega m(t) \ll \omega_c \quad (4.53)$$

η σχέση (4.52) περιγράφει ένα σήμα *DSB* με φέρουσα συχνότητα  $\omega_c$  και περιβάλλουσα:

$$A_c \omega_c \left[1 + \frac{k_\omega}{\omega_c} m(t)\right] \quad (4.54)$$

Έτσι, η ύπαρξη του διευκρινιστή μετέτρεψε τη διαμόρφωση συχνότητας σε διαμόρφωση πλάτους, με τη διαφορά ότι η φέρουσα συχνότητα έχει κάποια ελαφρά διακύμανση. Το σήμα *AM* της έκφρασης (4.52) μπορεί να αποδιαμορφωθεί από έναν αποδιαμορφωτή περιβάλλουσας, αφού, λόγω της (4.53), δεν μπορεί να ανιχνεύσει τις

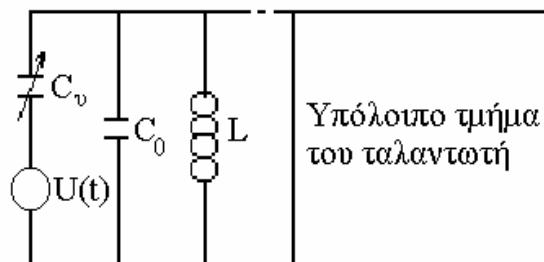
μικρές διακυμάνσεις της φέρουσας συχνότητας. Στο Σχήμα 4.10 φαίνεται ένας αποδιαμορφωτής FM, ο οποίος χρησιμοποιεί διεκκριστή.



Σχήμα 4.10. Ένας αποδιαμορφωτής FM με χρήση διεκκριστή.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

7. Το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμεύει για την παραγωγή σήματος FM. Ο μεταβλητός πυκνωτής (ελεγχόμενος από τάση) είναι μια ανάστροφα πολωμένη διάδος (*varactor*), η χωρητικότητα της οποίας σχετίζεται με την τάση πόλωσης μέσω της σχέσης:  $C_v = (100/\sqrt{1+2v})$  pF. Η χωρητικότητα  $C_0 = 100$  pF και η αυτεπαγωγή  $L$  ρυθμίζονται, έτσι ώστε να έχουμε συχνότητα συντονισμού 2 MHz, όταν εφαρμόζεται μια ανάστροφη σταθερή τάση  $v = 5$  V στη διάοδο. Υποτίθεται ότι η τάση διαμόρφωσης είναι της μορφής:  $v(t) = 5 + 0.05\sin(2\pi \times 10^3 t)$ . Αν το πλάτος των ταλαντώσεων εξόδου είναι 10 V, να βρεθεί η μορφή του γωνιακά διαμορφωμένου σήματος, που εμφανίζεται στα άκρα του συντονισμένου κυκλώματος.



### Απάντηση

Η χωρητικότητα  $C_v$  είναι:

$$C_v = \frac{100 \times 10^{-12}}{\sqrt{1+2v}} = \frac{10^{-10}}{\sqrt{1+2[5+0.05 \sin(2\pi \times 10^3 t)]}} = \frac{10^{-10}}{\sqrt{11[1+\frac{0.1}{11} \sin(2\pi \times 10^3 t)]}^{1/2}}$$

$$\cong C_{v_0} \left[ 1 - \frac{0.1}{22} \sin(2\pi \times 10^3 t) \right] = C_{v_0} - \Delta C_v$$

όπου  $C_{v_0} = 0.3 \times 10^{-10}$  F και  $\Delta C_v = 0.3 \times 10^{-10} \frac{0.1}{22} \sin(2\pi \times 10^3 t)$  F,

ενώ η στιγμιαία συχνότητα του ταλαντωτή είναι:

$$f_i = \frac{1}{2\pi \sqrt{L(C_0 + C_v)}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L(C_0 + C_{v_0} - \Delta C_v)}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L(C_0 + C_{v_0})}} \left[ 1 - \frac{\Delta C_v}{C_0 + C_{v_0}} \right]^{-1/2}$$

$$\cong f_0 \left[ 1 + \frac{\Delta C_v}{2(C_0 + C_{v_0})} \right] = f_0 \left[ 1 + \frac{0.3 \times 10^{-10}}{2(100 + 30) \times 10^{-12}} \cdot \frac{0.1}{22} \sin(2\pi \times 10^3 t) \right]$$

$$= f_0 + 1048 \sin(\omega_m t), \text{ όπου } f_0 = 2 \times 10^6 \text{ Hz.}$$

Το γωνιακά διαμορφωμένο σήμα δίνεται ότι έχει πλάτος  $A_c = 10$  V. Άρα, η μορφή του θα είναι:

$$x(t) = 10 \cos \left[ 2\pi \int_0^t f_i(t') dt' \right] = 10 \cos \left[ 2\pi \times 2 \times 10^6 t + 1.048 t - 1.048 \cos(2\pi \times 10^3 t) \right]$$

**8.** Ένα φέρον σήμα συχνότητας 200 kHz διαμορφώνεται κατά συχνότητα από ένα συνημιτονοειδές σήμα συχνότητας 1 kHz, έτσι ώστε η μέγιστη απόκλιση συχνότητας να είναι 150 Hz.

- Ποιο είναι το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος;
- Αν το παραπάνω σήμα εφαρμοστεί σε ένα πολλαπλασιαστή συχνότητας  $\times 10$ , κατά πόσο αυξάνεται το εύρος ζώνης;
- Αν το νέο σήμα περάσει από άλλο όμοιο πολλαπλασιαστή, κατά πόσο αυξάνεται το εύρος ζώνης;



- δ) Αν αντί διαδοχικών πολλαπλασιασμών συχνότητας, γινόταν απευθείας μετάθεση στην τελική φέρουσα συχνότητα, ποιο θα ήταν το εύρος ζώνης;

### Απάντηση

- α) Είναι  $f_c = 200$  kHz,  $f_m = 1$  kHz,  $\Delta f = 150$  Hz, οπότε ο δείκτης διαμόρφωσης  $\beta_1$  είναι:  $\beta_1 = \Delta f/f_m = 150/1000 = 0.15$ . Έτσι, το εύρος ζώνης  $B_1$  προκύπτει σ' αυτήν την περίπτωση:  $B_1 = 2(1 + \beta_1)f_m = 2.3 \times 1 = 2.3$  kHz.

Σημειώνεται ότι το σήμα *FM* είναι της μορφής:  $x_1(t) = A_1 \cos[2\pi f_c t + \beta_1 \sin(2\pi f_m t)]$

- β) Μετά τον πολλαπλασιασμό συχνότητας προκύπτει το σήμα:

$$x_2(t) = A_2 \cos[2\pi 10f_c t + 10\beta_1 \sin(2\pi f_m t)],$$

δηλαδή  $\beta_2 = 10\beta_1$ , οπότε το εύρος ζώνης είναι τώρα:  $B_2 = 2(1 + \beta_2)f_m = 5 \times 1 = 5$  kHz.

- γ) Μετά το δεύτερο πολλαπλασιασμό συχνότητας το σήμα είναι:

$$x_3(t) = A_3 \cos[2\pi 100f_c t + 100\beta_1 \sin(2\pi f_m t)],$$

οπότε  $\beta_3 = 10\beta_2 = 100\beta_1$  και το εύρος ζώνης είναι:  $B_3 = 2(1 + \beta_3)f_m = 32 \times 1 = 32$  kHz.

- δ) Αν γινόταν απευθείας μετάθεση της συχνότητας στην τελική συχνότητα, τότε το παραγόμενο σήμα θα ήταν της μορφής:

$$x(t) = A_c \cos[2\pi 100f_c t + \beta_1 \sin(2\pi f_m t)] \text{ και το εύρος ζώνης θα ήταν } B_1.$$

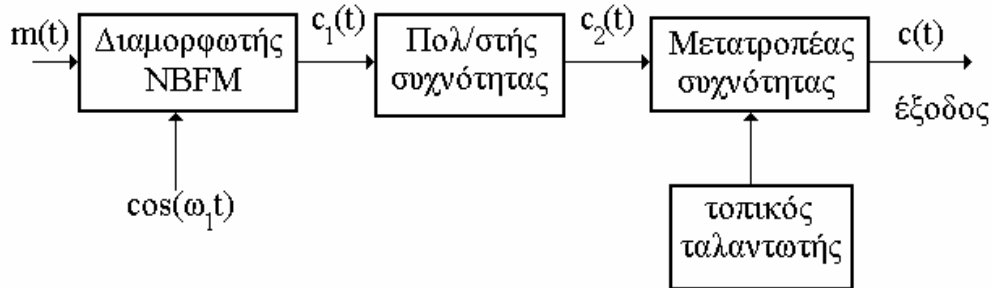
9. Ένας έμμεσος διαμορφωτής *FM* διαχειρίζεται σήματα στην περιοχή των ακουστικών συχνοτήτων ως εξής: Αρχικά, δημιουργεί σήμα *FM* με  $\beta = 0.2$  και φέρουσα συχνότητα 200 kHz. Το τελικό σήμα *FM*, το οποίο εκπέμπεται, πρέπει να έχει φέρουσα συχνότητα 40 MHz και μέγιστη απόκλιση συχνότητας 12 kHz. Χρησιμοποιώντας ένα πολλαπλασιαστή και ένα μίκτη μαζί με τα απαιτούμενα φίλτρα, σχεδιάστε δύο συστήματα, που παράγουν το επιθυμητό τελικό σήμα.

### Απάντηση

Το αρχικό σήμα *FM* στενής ζώνης είναι της μορφής  $c_1(t) = A_1 \cos[\omega_1 t + k_\omega \int_0^t m(t') dt']$ ,

όπου  $m(t)$  είναι το πληροφοριακό σήμα. Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι  $\Delta f = k \cdot \max\{m(t)\}$ , ενώ ο αρχικός δείκτης διαμόρφωσης είναι  $\beta = \Delta f/f_m = 0.2$ , όπου  $f_m$  είναι το

εύρος ζώνης του  $m(t)$ . Θεωρώντας (αυθαίρετα) ότι η μέγιστη ακουστική συχνότητα, που μεταδίδεται είναι 4 kHz, η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι  $\Delta f = 0.2 \times 4 = 0.8$  kHz.



Έστω λοιπόν ότι, στο υπό σχεδίαση σύστημα, ο πολλαπλασιαστής συχνότητας προηγείται (όπως στο σύστημα *Armstrong*) και ακολουθεί ο μετατροπέας συχνότητας. Ο πολλαπλασιαστής πρέπει να αυξάνει τη μέγιστη απόκλιση συχνότητας, ώστε να αυξάνεται, αντίστοιχα, και ο δείκτης διαμόρφωσης και μάλιστα στην τελική τιμή του, αφού ο μετατροπέας συχνότητας δε μεταβάλλει τις παραμέτρους  $\Delta f$  και  $\beta$ . Άρα, ο πολλαπλασιαστής πρέπει να πολλαπλασιάζει επί  $n$ , όπου:

$$n = \frac{12 \text{ kHz}}{0.8 \text{ kHz}} = 15$$

Έτσι, το σήμα εξόδου  $c_2(t)$  του πολλαπλασιαστή είναι:

$$c_2(t) = A_2 \cos\left[15\omega_1 t + 15k_\omega \int_0^t m(t') dt'\right]$$

όπου  $15f_1 = 15 \times 200 \text{ kHz} = 3 \text{ MHz}$ , δηλαδή η συχνότητα εξόδου είναι 3 MHz. Για να παραχθεί τελικό σήμα *FM* συχνότητας 40 MHz, πρέπει η συχνότητα του τοπικού ταλαντωτή να είναι  $f_{LO} = (40 \pm 3) \text{ MHz}$ , δηλαδή 43 MHz ή 37 MHz.

Το τελικό σήμα  $c(t)$  είναι της μορφής  $c(t) = A \cos\left[2\pi \times 40 \times 10^6 t + 15k_\omega \int_0^t m(t') dt'\right]$ .

Υπενθυμίζεται ότι ο μετατροπέας συχνότητας αποτελείται από ένα διαμορφωτή γινομένου, ο οποίος πολλαπλασιάζει τα σήματα  $c_2(t)$  και  $\cos(\omega_{LO}t)$ , ακολουθούμενος

από ένα ζωνοπερατό φίλτρο περί τη συχνότητα 40 MHz με εύρος ζώνης ίσο με το εύρος ζώνης του σήματος  $c_2(t)$ . Το εύρος ζώνης αυτό είναι  $B = 2(1+15 \times 0.2)4 = 32$  kHz.

Αν υποθεθεί ότι ο μετατροπέας προηγείται του πολλαπλασιαστή, επειδή ο μετατροπέας δε μεταβάλλει το  $\Delta f$ , η επιθυμητή μεταβολή του θα προέλθει μόνο από το μίκτη. Τότε,

θα είναι  $c_2(t) = A_2 \cos[2\pi(40/15) \times 10^6 t + k \int_0^t m(t') dt']$  και ο τοπικός ταλαντωτής του

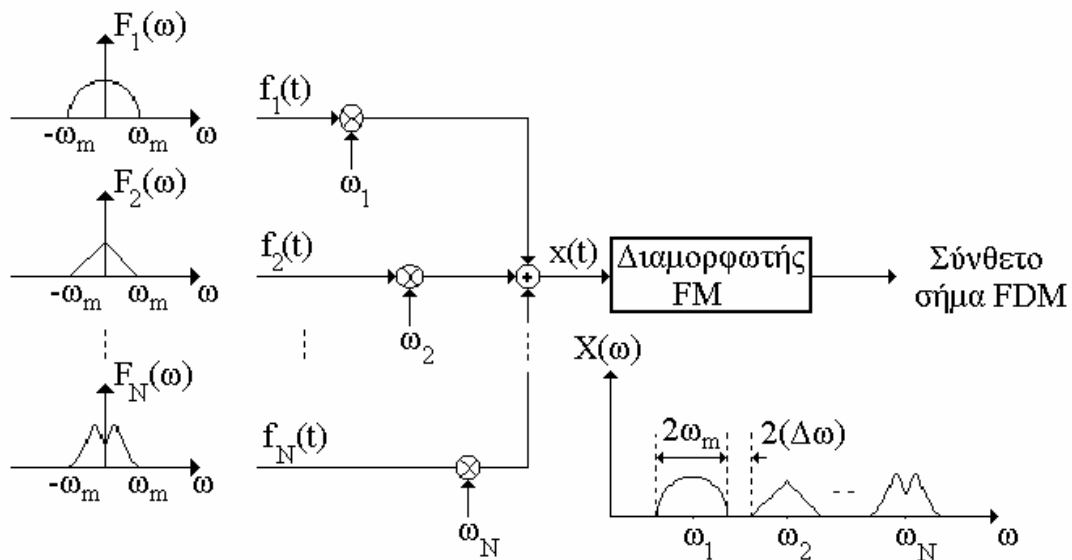
μετατροπέα θα έχει συχνότητα  $f_{LO} = (2.666 \pm 0.2)$  MHz.

#### 4.5 Πολυπλεξία με Διαίρεση Συχνότητας (*Frequency Division Multiplexing, FDM*)

Όπως έχει γίνει ήδη φανερό, τόσο από τη διαμόρφωση πλάτους όσο και από τη διαμόρφωση συχνότητας, είναι δυνατό να μεταδοθούν περισσότερα από ένα σήματα με επιλογή διαφορετικής φέρουσας συχνότητας για καθένα από τα επιμέρους σήματα. Οι υπο-φέρουσες συχνότητες (*subcarriers*) εκλέγονται έτσι ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη των επιμέρους πληροφοριακών σημάτων στο πεδίο της συχνότητας. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η λεγόμενη **πολυπλεξία σημάτων με διαίρεση συχνότητας (FDM)**, η οποία μπορεί να οριστεί ως η διαμόρφωση πολλών σημάτων, έτσι ώστε τα φάσματά τους να καταλαμβάνουν διαδοχικές περιοχές στο πεδίο της συχνότητας. Ο διαχωρισμός των επιμέρους σημάτων γίνεται με χρήση κατάλληλων φίλτρων. Σημειώνεται ότι τα συστήματα, τα οποία χρησιμοποιούν την τεχνική *FDM*, λέγονται **φερέσυχνα συστήματα**.

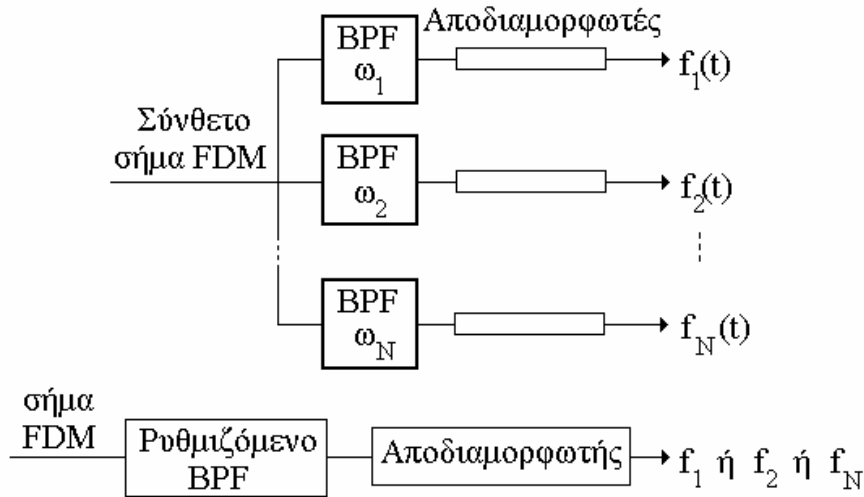
Υπάρχουν δύο κύρια είδη της πολυπλεξίας *FDM*, ανάλογα με τον τρόπο διαμόρφωσης των επιμέρους σημάτων για τη δημιουργία του συνολικού *FDM* σήματος: η **πολυπλεξία *AM-FM*** και η **πολυπλεξία *FM-FM***. Το πρώτο είδος αναφέρεται στην περίπτωση, κατά την οποία τα επιμέρους πληροφοριακά σήματα διαμορφώνουν κατά *AM* κάποιες από τις υπο-φέρουσες συχνότητες, ώστε να καταλάβουν την αντίστοιχη περιοχή στο φάσμα συχνοτήτων, ενώ στο δεύτερο είδος η αντίστοιχη διαμόρφωση είναι η *FM*. Κοινό χαρακτηριστικό και των δύο τύπων πολυπλεξίας *FDM* είναι ότι το συνολικό σήμα, που προκύπτει, συνήθως διαμορφώνει κατά *FM* το τελικό φέρον σήμα πολύ υψηλής συχνότητας.

Στο Σχήμα 4.11 δίνονται  $N$  σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης συχνοτήτων, τα οποία πολυπλέκονται κατά  $AM-FM$  στις υπο-φέρουσες συχνότητες  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ . Αν υποθεθεί ότι καθένα από τα  $N$  σήματα έχει εύρος ζώνης  $\omega_m$ , για να είναι διαχωρίσιμα τα επιμέρους φάσματα πρέπει οι διαδοχικές υποφέρουσες συχνότητες να απέχουν μεταξύ τους τουλάχιστον κατά  $2\omega_m$ . Συνήθως αυτό εξασφαλίζεται με το διαχωρισμό των υπο-φέρουσων συχνοτήτων κατά  $2(\omega_m + \Delta\omega)$ . Η ζώνη συχνοτήτων  $2(\Delta\omega)$  λέγεται **ζώνη διαχωρισμού** (*guard band*).



Σχήμα 4.11. Το σύστημα πολυπλεξίας FDM με την τεχνική AM-FM.

Στο δέκτη ενός σήματος FDM υπάρχουν δύο δυνατότητες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.12. Σύμφωνα με τον πρώτο τρόπο αποδιαμόρφωσης, τα επιμέρους σήματα, τα οποία συνυπάρχουν στο σύνθετο σήμα, διαχωρίζονται με τη χρήση κατάλληλων φίλτρων (BPF) και στη συνέχεια αποδιαμορφώνονται. Σημειώνεται ότι, το συνολικό FDM σήμα συνήθως έχει προκύψει από την αποδιαμόρφωση ενός FM σήματος. Ο δεύτερος τρόπος αποδιαμόρφωσης βασίζεται στην επιλογή μέσω ρυθμιζόμενου ζωνοπερατού φίλτρου κάποιου από τα επιμέρους φέροντα και στη συνέχεια αποδιαμόρφωσή του.



Σχήμα 4.12. Μέθοδοι αποδιαμόρφωσης σημάτων FDM.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Εκατό τηλεφωνικά σήματα πολυπλέκονται με διαίρεση συχνότητας, έτσι ώστε η ζώνη διαχωρισμού να είναι 200 Hz, ενώ το συνολικό σήμα διαμορφώνει κατά FM ένα μικροκυματικό φορέα συχνότητας 1 GHz. Αν ο δείκτης διαμόρφωσης είναι  $\beta = 3$  και το εύρος κάθε τηλεφωνικού διαύλου είναι 3.8 kHz, να προσδιοριστεί το εύρος ζώνης RF.

### Απάντηση

Για να εξοικονομηθεί εύρος ζώνης, τα τηλεφωνικά σήματα διαμορφώνονται κατά AM-SSB. Συνεπώς, κάθε τηλεφωνικός διάυλος καταλαμβάνει εύρος ζώνης 3.8 kHz, οπότε και το συνολικό εύρος ζώνης του σήματος βασικής ζώνης που δημιουργείται από την πολυπλεξία είναι  $B_{FDM} \cong 100(3.8+0.2) = 400$  kHz. Το εύρος ζώνης ραδιοσυχνοτήτων, που προκύπτει, όταν το πολυπλεγμένο σήμα διαμορφώσει κατά συχνότητα τον υψίσυχο μικροκυματικό φορέα, είναι  $B_{RF} = 2(1+3)B_{FDM} = 3.2$  MHz.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

FREQUENCY-MODULATION SYSTEMS

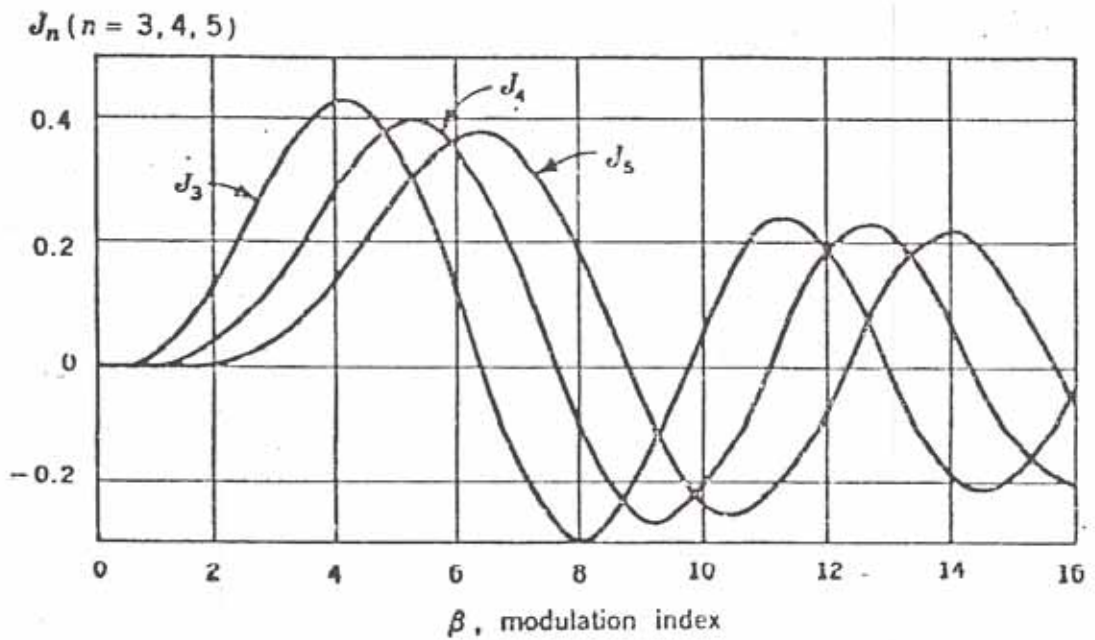
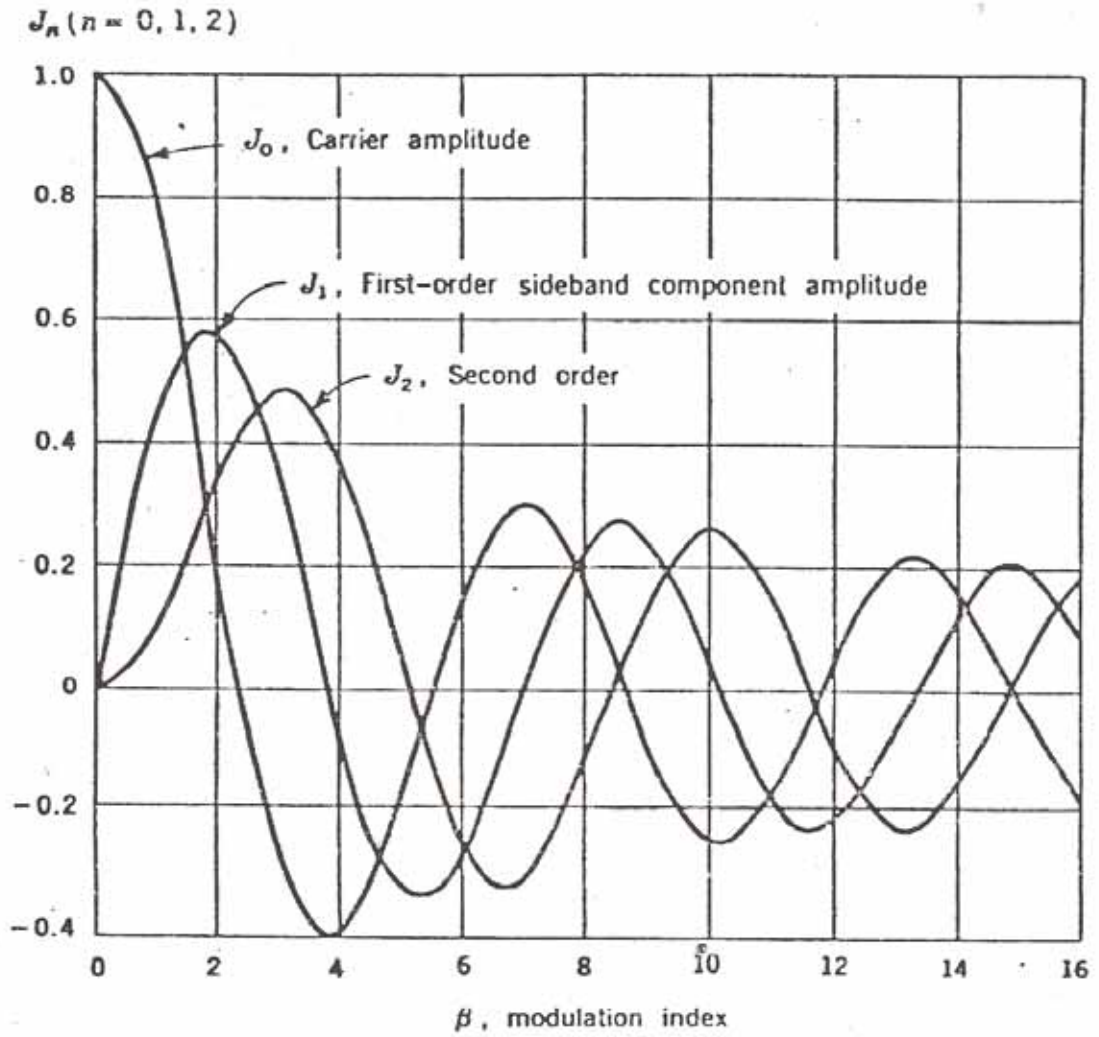


Fig. 4.6-1 The Bessel functions  $J_n(\beta)$  plotted as a function of  $\beta$  for  $n = 0, 1, 2, \dots, 5$ .

