

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΘΟΡΥΒΟΣ

2.1 Εισαγωγή

Ο θόρυβος (*noise*) ορίζεται σαν ένα ανεπιθύμητο σήμα, που υπάρχει πάντοτε στα συστήματα τηλεπικοινωνιών και δυσκολεύει την ανάκτηση της πληροφορίας στο δέκτη. Η μελέτη του θορύβου είναι αναγκαία, αφού αυτός αποτελεί έναν από τους καθοριστικότερους παράγοντες της ποιότητας ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος. Παρόμοιο ρόλο με το θόρυβο παίζει και η παρεμβολή (*interference*), όμως υπάρχει μια βασική διαφορά μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, ενώ ο θόρυβος είναι ένα σύνολο τυχαίων σημάτων με ανεξάρτητες φάσεις και συχνότητες, η παρεμβολή προέρχεται από ένα καθορισμένο σήμα και δίνει ένα σήμα με κάποια περιοδικότητα και φάσης.

Οι πηγές που παράγουν θόρυβο ταξινομούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, από τις οποίες η πρώτη περιλαμβάνει τον **τεχνητό** (*artificial* ή *man made noise*) και η δεύτερη το **φυσικό** (*natural*) **θόρυβο**. Ο τεχνητός θόρυβος προέρχεται από ηλεκτρικές συσκευές όπως συλλέκτες κινητήρων, διακόπτες και ηλεκτρονόμους κακών επαφών, συστήματα ανάφλεξης αυτοκινήτων και μηχανών, οικιακές ηλεκτρικές συσκευές κ.λ.π. Όλες αυτές οι ηλεκτρικές συσκευές παράγουν ανεπιθύμητα ηλεκτρικά σήματα, τα οποία μπορούν να εντοπιστούν και να απαλειφθούν ή τουλάχιστον να περιοριστούν. Ο φυσικός θόρυβος διακρίνεται στο θόρυβο που έχει ως πηγή του την κοσμική ακτινοβολία ή την ατμόσφαιρα και στο θόρυβο που έχει ως πηγή τα ηλεκτρονικά κυκλώματα και στοιχεία. Ο κοσμικός και ατμοσφαιρικός θόρυβος εισάγεται στο δέκτη με την κεραία και ο μεν πρώτος προέρχεται από ηλιακές ακτινοβολίες ή από ακτινοβολίες αστερών των γαλαξιών, ο δε δεύτερος από ατμοσφαιρικές διαταραχές, καταιγίδες κ.λ.π. Ο κοσμικός και ατμοσφαιρικός θόρυβος, που είναι γνωστός και σαν θερμοκρασία ουράνιου θορύβου (*sky noise temperature*), είναι ασήμαντος σε σχέση μ' εκείνον που παράγεται από τα ηλεκτρονικά κυκλώματα.

Τα δύο σημαντικότερα είδη θορύβων, τα οποία συνδέονται με τα ηλεκτρονικά στοιχεία (αντιστάσεις, λυχνίες, *transistors*) είναι ο **θερμικός θόρυβος** (*Thermal noise*) και ο **θόρυβος βολής** (*Shot noise*). Ο πρώτος παράγεται από την τυχαία κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων των αγωγών, κίνηση η οποία εξαρτάται από τη θερμοκρασία

του αγωγού και παράγει ένα ρεύμα μέσα στον αγωγό, έτσι ώστε ακόμη και όταν δεν υπάρχει ρεύμα στον αγωγό, όταν αυτός είναι ανοικτοκυκλωμένος, η τυχαία κίνηση των ηλεκτρονίων παράγει διακυμάνσεις της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του αγωγού, η οποία μετρείται με τη μέση τετραγωνική τιμή $\overline{U_n^2}$. Ο θόρυβος βολής οφείλεται κατά βάση στις τυχαίες διακυμάνσεις της εκπομπής των ηλεκτρονίων από την κάθοδο μιας λυχνίας ή στις τυχαίες μεταβολές στη διάχυση των φορέων φορτίων σε μια δίοδο ή ένα *transistor*. Ο θόρυβος των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων οφείλεται στη φύση των στοιχείων, από τα οποία αποτελούνται, και δεν είναι δυνατόν να απαλειφθεί. Παρόλα αυτά, ο θόρυβος πρέπει να μελετηθεί καλά, ώστε να περιοριστεί με κατάλληλη επιλογή των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.

Στα περισσότερα συστήματα τηλεπικοινωνιών το συνηθισμένο κριτήριο καλής ποιότητας είναι ο λόγος της ισχύος του σήματος προς την ισχύ του θορύβου (*Signal to Noise Ratio, S/N, SNR*) στην έξοδο του φωρατή. Το κριτήριο αυτό αποτελεί συχνά τη βάση σύγκρισης των διαφόρων συστημάτων τηλεπικοινωνιών, καθώς αυτά μπορεί να διαφέρουν σ' ένα πλήθος άλλων τεχνικών χαρακτηριστικών, τα οποία καθιστούν τη σύγκριση τους πολύ δύσκολη.

2.2 Θερμικός Θόρυβος

Ο θερμικός θόρυβος ανακαλύφθηκε πειραματικά από τον *J. B. Johnson*¹ και αποδείχτηκε θεωρητικά από τον *H. Nyquist*². Συγκεκριμένα, το πείραμα έδειξε ότι:

$$\overline{U_t^2} = 4kTBR \quad (2.1)$$

όπου $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K είναι η σταθερά του *Boltzmann*, B είναι το εύρος ζώνης του συστήματος, T είναι η απόλυτη θερμοκρασία σε βαθμούς *Kelvin*, ενώ $\overline{U_t^2}$ είναι η μέση τετραγωνική τιμή της τάσης του θερμικού θορύβου κατά μήκος μιας αντίστασης R . Από την άλλη πλευρά, η θεωρητική ανάλυση του *Nyquist* έδειξε ότι η ισχύς του θερμικού θορύβου P_N είναι:

¹. J. B. Johnson, "*Thermal Agitation of Electricity in Conductors*", Phys. Rev., vol. **32**, 1928.

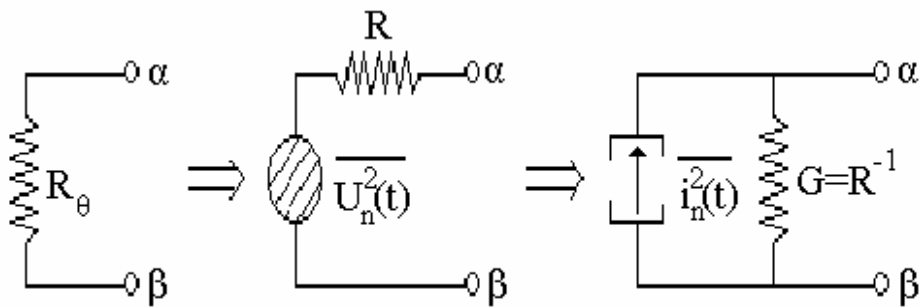
². H. Nyquist, "*Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors*", Phys. Rev., vol. **32**, 1928.

$$P_N = kTB \quad (2.2)$$

Στην πράξη όμως ενδιαφέρον παρουσιάζει η γνώση της πυκνότητας του φάσματος ισχύος του θερμικού θορύβου, η οποία για μια αντίσταση R , που βρίσκεται σε απόλυτη θερμοκρασία T (°K), δίνεται από τη σχέση:

$$S(\omega) = 2kTR \quad (2.3)$$

Εξάλλου, μια αντίσταση R_θ που παράγει θόρυβο μπορεί να παρασταθεί, είτε με μια πηγή τάσης $\overline{U_n^2(t)}$ σε σειρά με μια "αθόρυβη" αντίσταση R , είτε με μια πηγή ρεύματος $\overline{i_n^2(t)}$ παράλληλα με μια "αθόρυβη" αγωγιμότητα $G = 1/R$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Σημειώνεται ότι οι αντιστάσεις R_θ και R έχουν την ίδια τιμή και η μόνη διαφορά τους είναι ότι η πρώτη παράγει θερμικό θόρυβο, ενώ η δεύτερη όχι. Επίσης, η σχέση (2.3) ισχύει για συχνότητες $f < 10$ GHz, ενώ για μεγαλύτερες συχνότητες η πυκνότητα του φάσματος του θερμικού θορύβου μεταβάλλεται με τη συχνότητα.



Σχήμα 2.1. Ισοδύναμα Thevenin και Norton μιας ενθόρυβης αντίστασης R_θ

2.3 Θόρυβος Βολής

Ο θόρυβος αυτός εμφανίζεται σε σωλήνες κενού και συσκευές ημιαγωγών και στους μεν σωλήνες κενού οφείλεται στην τυχαία εκπομπή ηλεκτρονίων από την κάθοδο, στους δε ημιαγωγούς στην τυχαία διάχυση των φορέων μειονότητας και στην τυχαία δημιουργία και επανασύνδεση των ζευγών οπών και ηλεκτρονίων.

2.4 Διαθέσιμο Φάσμα Ισχύος

Διαθέσιμη ισχύς μιας πηγής ονομάζεται η μέγιστη ισχύς, την οποία μπορεί η πηγή να διαθέσει, είναι δηλαδή η ισχύς που αποδίδει η πηγή στο προσαρμοσμένο σ' αυτή φορτίο. Για μια πηγή συνεχούς τάσης (DC) V_S και εσωτερικής αντίστασης R_S , το προσαρμοσμένο φορτίο είναι $R_L = R_S$ και, επομένως, η διαθέσιμη ισχύς αυτής είναι:

$$P_{av} = I_S^2 R_S = V_S^2 / 4R_S \quad (2.4)$$

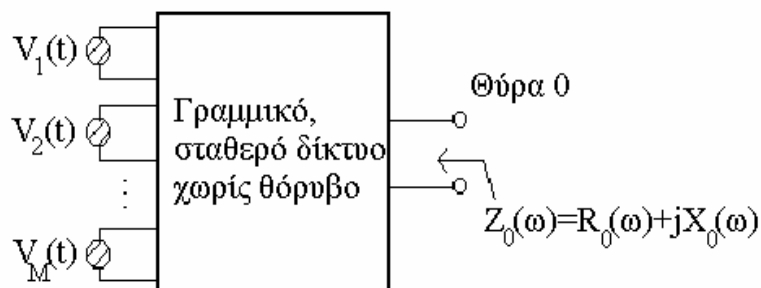
Εξάλλου, για μια ημιτονοειδή πηγή τάσης $V_0(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \varphi)$ και σύνθετης αντίστασης $Z_S(\omega) = R_S(\omega) + iX_S(\omega)$ το προσαρμοσμένο φορτίο είναι $Z_L = Z_S^*$ και η διαθέσιμη ισχύς της πηγής είναι:

$$P_{av} = V^2 / 4R_S \quad (2.5)$$

Τότε, το διαθέσιμο φάσμα ισχύος ορίζεται από τη σχέση:

$$S_{av} = \frac{P_{av}}{2B} = \frac{kT}{2} \quad (2.6)$$

2.5 Θόρυβος από ένα Δίκτυο



Σχήμα 2.2. Δίκτυο με m ανεξάρτητες πηγές θερμικού θορύβου.

Έστω το γραμμικό και σταθερό δίκτυο του Σχήματος 2.2, το οποίο περιέχει M πηγές θορύβου με τάσεις $V_1(t)$, $V_2(t)$, ..., $V_M(t)$, αντίστοιχα, που θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αν $S_i(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, M$) είναι η πυκνότητα του φάσματος ισχύος της πηγής θορύβου $V_i(t)$ και $H_i(\omega)$ η συνάρτηση μεταφοράς από τη θύρα i στη θύρα o

(έξοδος) με τις υπόλοιπες θύρες βραχυκυκλωμένες, τότε η πυκνότητα του φάσματος ισχύος στην έξοδο δίνεται από τη σχέση:

$$S_o(\omega) = \sum_{n=1}^M |H_n(\omega)|^2 S_n(\omega) \quad (\text{Γενικευμένο θεώρημα Nyquist}) \quad (2.7)$$

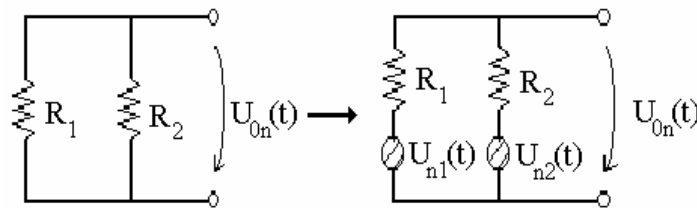
Όταν όλες οι πηγές βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία T , (δηλαδή όταν το σύστημα βρίσκεται σε θερμοκρασιακή ισορροπία), τότε η πυκνότητα του φάσματος ισχύος του θορύβου μπορεί να υπολογιστεί και από τη σχέση:

$$S_o(\omega) = 2kTR_o(\omega) \quad (2.8)$$

όπου $R_o(\omega)$ είναι το πραγματικό μέρος της σύνθετης αντίστασης εξόδου με βραχυκυκλωμένες όλες τις ανεξάρτητες πηγές του κυκλώματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί ο θερμικός θόρυβος από δύο παράλληλες αντιστάσεις.



Απάντηση

Όταν οι δύο αντιστάσεις βρίσκονται σε θερμοκρασίες T_1 και T_2 , αντίστοιχα, τότε η χρήση του γενικευμένου θεωρήματος του Nyquist είναι υποχρεωτική. Για το παραπάνω κύκλωμα οι συναρτήσεις μεταφοράς δίνονται από τις σχέσεις:

$$H_1(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{και} \quad H_2(\omega) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

και επομένως

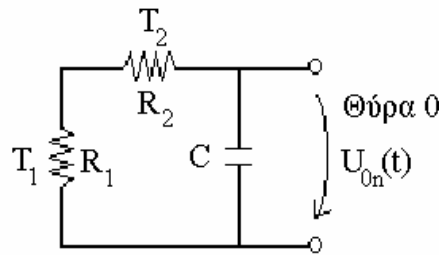
$$S_o(\omega) = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 2kT_1 R_1 + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)^2 2kT_2 R_2 = \frac{2kR_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} (R_2 T_1 + R_1 T_2)$$

Αν οι αντιστάσεις βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία ($T_1 = T_2 = T$), τότε η παραπάνω σχέση δίνει:

$$S_o(\omega) = 2kTR_1R_2/(R_1+R_2)$$

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση αυτή θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση (2.8), από την οποία προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα.

2. Να βρεθεί η φασματική πυκνότητα ισχύος του θερμικού θορύβου στην έξοδο (θύρα 0) του κυκλώματος του παρακάτω σχήματος για τη γενική περίπτωση όπου $T_1 \neq T_2$. Στη συνέχεια, να προσδιοριστεί η μέση τετραγωνική τιμή της τάσης του θερμικού θορύβου εξόδου. Τέλος, υπολογίστε τις δύο παραπάνω ποσότητες για την ειδική περίπτωση $T_1 = T_2$.



Απάντηση

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (2.7) με $H_1(\omega) = H_2(\omega) = \frac{1}{1+i\omega C(R_1+R_2)}$, $S_1(\omega) = 2kT_1R_1$

και $S_2(\omega) = 2kT_2R_2$, προκύπτει η σχέση: $S_o(\omega) = \frac{2k(T_1R_1 + T_2R_2)}{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}$, ενώ η μέση

τετραγωνική τιμή της τάσης του θερμικού θορύβου στην έξοδο είναι:

$$\overline{U_{on}^2(t)} = R_{on}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_o(\omega) d\omega = \frac{2k(T_1R_1 + T_2R_2)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$

$$= \frac{2k\omega_0(T_1R_1 + T_2R_2)}{2\pi} \left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2k\omega_0(T_1R_1 + T_2R_2)}{2\pi} \pi = \frac{k(T_1R_1 + T_2R_2)}{(R_1 + R_2)C}$$

όπου $\omega_0 = \frac{1}{(R_1 + R_2)C}$.

Όταν $T_1 = T_2 = T$, τότε η φασματική πυκνότητα ισχύος του θερμικού θορύβου στην έξοδο θα μπορούσε να βρεθεί:

α) είτε με απευθείας αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση για το $S_o(\omega)$, οπότε προκύπτει:

$$S_o(\omega) = \frac{2kT(R_1 + R_2)}{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}$$

β) είτε από τη σχέση (2.8). Συγκεκριμένα, στην περίπτωση αυτή η σύνθετη αντίσταση εξόδου είναι:

$$\frac{1}{Z_o(\omega)} = \frac{1}{R_1 + R_2} + i\omega C = \frac{1 + i\omega C(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)} \Rightarrow Z_o(\omega) = \frac{R_1 + R_2}{1 + i\omega C(R_1 + R_2)} \Rightarrow$$

$$R_o(\omega) = \text{Re}[Z_o(\omega)] = \frac{R_1 + R_2}{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}, \text{ οπότε και πάλι}$$

$$S_o(\omega) = 2kTR_o(\omega) = \frac{2kT(R_1 + R_2)}{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}.$$

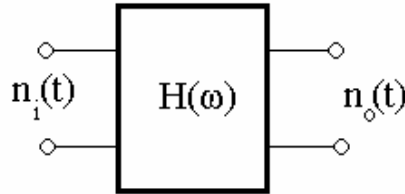
Η μέση τετραγωνική τιμή της τάσης του θερμικού θορύβου στην έξοδο δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{U_{on}^2(t)} = \frac{kT}{C} \quad (2.9)$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί: Συγκεκριμένα, για ένα παθητικό και γραμμικό δίκτυο, το οποίο βρίσκεται σε ομοιόμορφη θερμοκρασία T , στην έξοδο του οποίου είναι συνδεδεμένος πυκνωτής χωρητικότητας C , η μέση τετραγωνική τιμή της τάσης του θορύβου εξόδου δίνεται από τη σχέση (2.9). Αυτό αποτελεί συνέπεια του γνωστού, από τη Θερμοδυναμική, θεωρήματος της ισοκατανομής (*Equipartition Theorem*) σύμφωνα με το οποίο, όταν ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι μεγάλος, η συνολική μέση αποθηκευμένη ενέργεια είναι $kT/2$. Ένας βαθμός ελευθερίας αντιστοιχεί σε κάθε συντεταγμένη από την οποία η ενέργεια εξαρτάται τετραγωνικά.

2.6 Ισοδύναμο Εύρος Ζώνης Θορύβου

Έστω το γραμμικό σύστημα του Σχήματος 2.3 με συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$, στην είσοδο του οποίου εφαρμόζεται το σήμα θορύβου $n_i(t)$ με πυκνότητα φάσματος ισχύος $S_i(\omega)$.



Σχήμα 2.3. Γραμμικό σύστημα συνάρτησης μεταφοράς $H(\omega)$.

Τότε, η ισχύς του θορύβου στην έξοδο του γραμμικού συστήματος είναι:

$$P_o = \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(f) |H(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \quad (2.10)$$

Η πυκνότητα $S_i(\omega)$ του φάσματος της ισχύος του θορύβου είναι σταθερή για τα συνήθη εύρη ζώνης των κυκλωμάτων. Υποθέτοντας ότι το πλάτος του φάσματος του θορύβου είναι $(n/2)$, η εξίσωση (2.10) γράφεται:

$$P_o = \frac{n}{2\pi} \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (2.11)$$

Προφανώς, το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι σταθερό για ένα δεδομένο κύκλωμα. Τότε, το ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου γύρω από τη συχνότητα ω_0 ορίζεται από τη σχέση:

$$B_N = \frac{\int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{2\pi |H(\omega_0)|^2} \quad (2.12)$$

οπότε η ισχύς του θορύβου στην έξοδο γίνεται:

$$P_o = n |H(\omega_0)|^2 B_N \quad (2.13)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η σχέση που συνδέει την έξοδο ενός ιδανικού συστήματος διέλευσης ζώνης συχνοτήτων (*Band-pass system*) εύρους ζώνης B_N και σταθερού κέρδους $H(\omega_0)$.

2.7 Ενεργός Θερμοκρασία Θορύβου

Από τις εξισώσεις (2.2) και (2.6) προκύπτει ότι $P_{av} = kTB$, δηλαδή υπάρχει κλειστή σχέση μεταξύ της διαθέσιμης ισχύος θερμικού θορύβου και της θερμοκρασίας. Υπάρχει, λοιπόν, η δυνατότητα της αίσθησης της ισχύος του θερμικού θορύβου μιας πηγής θορύβου ορίζοντας την ενεργό θερμοκρασία της πηγής. Στους υπολογισμούς και στις μετρήσεις θορύβου έχει συμφωνηθεί μια τυπική θερμοκρασία περιβάλλοντος $T_0 = 290^\circ\text{K}$. Σχετικά με την ενεργό θερμοκρασία των διαφόρων πηγών θορύβου διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

2.7.1 Ενεργός θερμοκρασία πηγής T_S

Αυτή ορίζεται από τη σχέση:

$$T_S = (\text{Διαθέσιμη ισχύς θορύβου από την πηγή στο εύρος ζώνης } B)/kB \quad (2.14)$$

Για τις πηγές θερμικού θορύβου η ενεργός θερμοκρασία T_S είναι μια φυσική θερμοκρασία, ενώ για τις μη θερμικές (πηγές κοσμικού ή ηλιακού θορύβου) η ενεργός θερμοκρασία είναι ένα μέτρο της διαθέσιμης από την πηγή ισχύος θορύβου.

2.7.2 Ενεργός θερμοκρασία θορύβου ενισχυτή

Αυτή ορίζεται από τη σχέση:

$$T_A = \frac{N_{oA}}{G_A kB_N} \quad (2.15)$$

όπου N_{oA} είναι η διαθέσιμη ισχύς θορύβου στην έξοδο του ενισχυτή λόγω του θορύβου που παράγεται μέσα στο κύκλωμα του ενισχυτή, G_A είναι το κέρδος ισχύος του ενισχυτή και B_N είναι το ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου γύρω από την κεντρική συχνότητα ω_0 της συνάρτησης μεταφοράς $H(\omega)$ του ενισχυτή. Υπενθυμίζεται ότι:

$$G_A = \frac{S_{out}}{S_{input}} \quad (2.16)$$

όπου S_{out} και S_{input} είναι η διαθέσιμη ισχύς του σήματος στην έξοδο και στην είσοδο του ενισχυτή, αντίστοιχα.

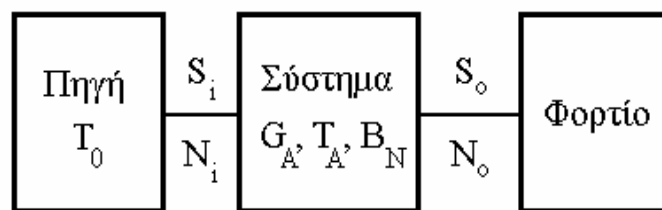
2.7.3 Ενεργός θερμοκρασία γραμμής μεταφοράς

Αυτή ορίζεται από τη σχέση:

$$T_L = (L - 1)T_0 \quad (2.17)$$

όπου L είναι η απώλεια της γραμμής μεταφοράς.

2.8 Συντελεστής Θορύβου Γραμμικού Συστήματος



Σχήμα 2.4. Γραμμικό σύστημα με πηγή και φορτίο προσαρμοσμένα σ' αυτό.

Έστω το σύστημα του Σχήματος 2.4, που μπορεί να είναι ένας δέκτης ή ένας ενισχυτής και είναι προσαρμοσμένο τόσο στην πηγή όσο και στο φορτίο. Υποτίθεται, ακόμη, ότι T_0 είναι η ενεργός θερμοκρασία θορύβου πηγής, S_i και N_i οι διαθέσιμες ισχύεις σήματος και θορύβου της πηγής, αντίστοιχα, G_A το κέρδος ή η απολαβή ισχύος του συστήματος, B_N το ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου του συστήματος, T_A η ενεργός θερμοκρασία θορύβου του συστήματος, και $S_o - N_o$ οι διαθέσιμες ισχύεις σήματος και θορύβου εξόδου του συστήματος. Τότε, ο **συντελεστής θορύβου** ή η **εικόνα θορύβου** F ορίζεται από τη σχέση:

$$F = \frac{N_o}{N_{o,\alpha\theta}} = \frac{N_o}{G_A N_i} \quad (2.18)$$

όπου N_o είναι η διαθέσιμη ισχύς του θορύβου στην έξοδο του συστήματος όταν αυτό παράγει θόρυβο και $N_{o,\theta}$ είναι η διαθέσιμη ισχύς του θορύβου στην έξοδο του συστήματος, όταν αυτό θεωρείται αθόρυβο. Ισχύει όμως:

$$\begin{aligned} N_i &= kT_0 B_N \\ N_o &= G_A(kT_0 B_N) + G_A N_i = G_A k B_N (T_A + T_0) \\ S_o &= G_A S_i \end{aligned} \quad (2.19)$$

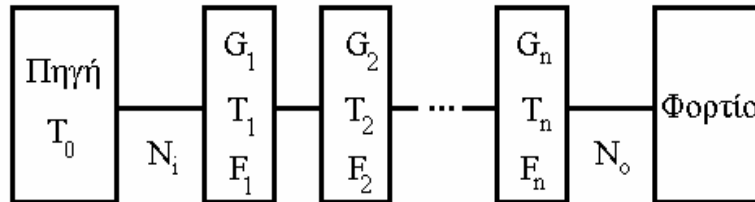
Συνεπώς:

$$F = 1 + \frac{T_A}{T_0} = \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o} \quad (2.20)$$

δηλαδή ο συντελεστής θορύβου είναι ίσος με το πηλίκο των λόγων σήματος–προς–θόρυβο στην είσοδο και στην έξοδο του συστήματος,

$$F = \frac{SNR_i}{SNR_o} \quad (2.21)$$

2.9 Συντελεστής Θορύβου Συστήματος Πολλαπλών Βαθμίδων



Σχήμα 2.5. Σύστημα πολλαπλών βαθμίδων συνδεδεμένων σε σειρά.

Έστω το σύστημα των n βαθμίδων σε σειρά του Σχήματος 2.5 με κέρδη ισχύος G_1, G_2, \dots, G_n , συντελεστές θορύβου F_1, F_2, \dots, F_n και θερμοκρασίες T_1, T_2, \dots, T_n , αντίστοιχα.

Τότε το συνολικό κέρδος του συστήματος είναι:

$$G_{total} = \prod_{i=1}^n G_i \quad (2.22)$$

Ο θόρυβος N_o στην έξοδο του συστήματος θα είναι το άθροισμα των θορύβων των πηγών θορύβου με ενεργές θερμοκρασίες T_1, T_2, \dots, T_n ανάλογα ενισχυμένες. Συνεπώς:

$$N_o = kT_0 B_N \left(\prod_{i=1}^n G_i \right) + kT_1 B_N \left(\prod_{i=1}^n G_i \right) + kT_2 B_N \left(\prod_{i=2}^n G_i \right) + \dots + kT_{n-1} B_N \left(\prod_{i=n-1}^n G_i \right) + kT_n B_N G_n$$

$$= G_{total} kT_0 B_N \left(1 + \frac{T_1}{T_0} + \frac{T_2}{T_0 G_1} + \dots + \frac{T_n}{T_0 G_1 G_2 \dots G_{n-1}} \right) \quad (2.23)$$

Αν όλες οι βαθμίδες του συστήματος ήταν αθόρυβες, τότε η διαθέσιμη ισχύς θορύβου N_{on} στην έξοδο αυτού θα ήταν:

$$N_{on} = G_{total} kT_0 B_N \quad (2.24)$$

και επομένως

$$F = \frac{N_o}{N_{on}} = 1 + \frac{T_1}{T_0} + \frac{T_2}{T_0 G_1} + \frac{T_3}{T_0 G_1 G_2} \dots + \frac{T_n}{T_0 G_1 G_2 \dots G_{n-1}} \quad (2.25)$$

Εξάλλου, για κάθε βαθμίδα ισχύει:

$$F_\kappa = 1 + (T_\kappa / T_0) \quad (2.26)$$

οπότε η εξίσωση (2.25) γράφεται:

$$F = F_1 + \frac{(F_2 - 1)}{G_1} + \frac{(F_3 - 1)}{G_1 G_2} \dots + \frac{(F_n - 1)}{G_1 G_2 \dots G_{n-1}} \quad (2.27)$$

ή ισοδύναμα:

$$T = T_1 + \frac{T_2}{G_1} + \frac{T_3}{G_1 G_2} \dots + \frac{T_n}{G_1 G_2 \dots G_{n-1}} \quad (2.28)$$

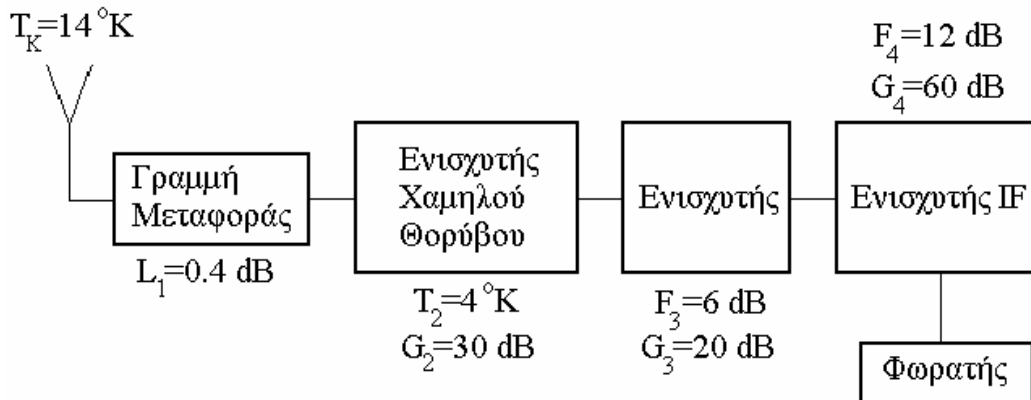
Από τις εξισώσεις (2.27) και (2.28) είναι φανερό ότι ο συντελεστής θορύβου και η ενεργός θερμοκρασία θορύβου ενός συστήματος εξαρτάται κυρίως από το συντελεστή θορύβου και την ενεργό θερμοκρασία θορύβου, αντίστοιχα, της πρώτης βαθμίδας. Για το λόγο αυτό η πρώτη βαθμίδα των δεκτών μεγάλης ευαισθησίας (*radar*, δορυφορικοί δέκτες) είναι ενισχυτές χαμηλού θορύβου (*Low Noise Amplifiers, LNA*).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Για τη διάταξη του παρακάτω σχήματος να υπολογιστούν:

- (i) Ο συντελεστής και η ενεργός θερμοκρασία θορύβου του δέκτη μικροκυμάτων χωρίς την κεραία.
- (ii) Η διαθέσιμη ισχύς της κεραίας, που θα δώσει ένα λόγο σήματος-προς-θόρυβο $S_o/N_o = 20$ dB στην είσοδο του φωρατή.

Το εύρος ζώνης του δέκτη είναι 4 MHz.



Απάντηση

$$(i) \quad F_1 = L_1 = 10^{0.04} = 1.0965, \quad G_1 = 1/L_1 = 0.912$$

$$F_2 = 1 + T_2/T_0 = 1.0138, \quad G_2 = 10^3$$

$$F_3 = 10^{0.6} = 3.9811, \quad G_3 = 10^2$$

$$F_4 = 10^{1.2} = 15.8489, \quad G_4 = 10^6$$

$$G_{tot} = \left(\prod_{i=1}^4 G_i \right) = 0.912 \times 10^{11}$$

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \frac{F_4 - 1}{G_1 G_2 G_3} = 1.1151 \Rightarrow T_e = (F - 1)T_0 = 33.38^\circ\text{K}$$

$$(ii) \quad \left. \begin{aligned} S_o &= G_{tot} S_i \\ N_o &= G_{tot} k(T_K + T_e)B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{k(T_K + T_e)B} = 10^2 \Rightarrow S_i = 0.262 \text{ pW}$$

2.10 Λευκός, Έγχρωμος και Κανονικός Θόρυβος

Ο λευκός θόρυβος (*white noise*) έχει ομοιόμορφη κατανομή πυκνότητας φάσματος ισχύος, όπως και το λευκό φως, δηλαδή:

$$S(\omega) = n/2, \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (2.29)$$

Επειδή τα συστήματα τηλεπικοινωνιών είναι συστήματα περιορισμένου εύρους ζώνης, είναι περισσότερο πρακτικό ο θόρυβος να θεωρείται **περιορισμένου εύρους ζώνης** ή **έγχρωμος θόρυβος**, του οποίου η πυκνότητα του φάσματος ισχύος είναι:

$$S(\omega) = P_0/2, \quad |\omega| < w \quad (2.30)$$

Τέλος, ως **κανονικός θόρυβος** ή **θόρυβος κανονικής κατανομής** ορίζεται ο θόρυβος, ο οποίος έχει πυκνότητα φάσματος ισχύος με κανονική κατανομή, δηλαδή:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-(\omega^2/2N)}, \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (2.31)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

4. Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης $R(\tau)$ του λευκού, του έγχρωμου και του κανονικού θορύβου.

Απάντηση

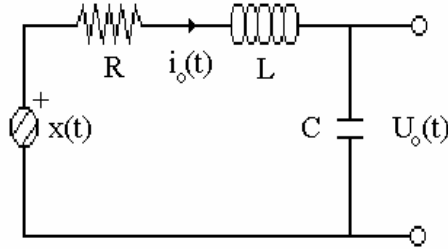
$$\alpha) \quad R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{i2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2} e^{i2\pi f\tau} df = \frac{n}{2} \delta(\tau)$$

$$\beta) \quad R(\tau) = \frac{P_0}{2} \int_{-B}^B e^{i2\pi f\tau} df = P_0 B \frac{\sin(2\pi B\tau)}{(2\pi B\tau)} = P_0 B \text{Sa}(2\pi B\tau)$$

$$\gamma) \quad R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-4\pi^2 f^2/2N} e^{i2\pi f\tau} df = e^{-N\tau^2/2}$$

$$\alpha\text{φού} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(ax^2 + bx + c)] dx = \sqrt{\pi/a} \exp[(b^2 - 4ac)/4a]$$

5. Η τάση $x(t)$ στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος έχει τα εξής χαρακτηριστικά: $E[x(t)] = 1$ και $R_{XX}(\tau) = 1 + \exp(-a|\tau|)$. Να υπολογιστεί η φασματική πυκνότητα ισχύος της τάσης εξόδου $U_o(t)$ καθώς ο θερμικός θόρυβος της αντίστασης θεωρείται αμελητέος.



Απάντηση

Η φασματική πυκνότητα ισχύος της τάσης εξόδου $U_o(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$S_{U_o U_o}(f) = |H(f)|^2 S_{XX}(f)$$

$$\text{όπου } H(f) = \frac{U_o(f)}{X(f)} = \frac{(1/j2\pi f C)}{R + j2\pi f L + (1/j2\pi f C)} = \frac{1}{j2\pi f RC + (1 - 4\pi^2 f^2 LC)}$$

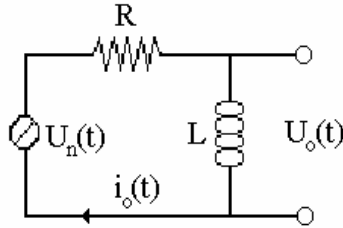
$$\begin{aligned} \text{και } S_{XX}(f) &= \mathfrak{I}[R_{XX}(\tau)] = \mathfrak{I}[1] + \mathfrak{I}[e^{-a|\tau|}] = \delta(f) + \int_{-\infty}^0 e^{a\tau} e^{-j2\pi f \tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-a\tau} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= \delta(f) + \frac{1}{a - j2\pi f} + \frac{1}{a + j2\pi f} = \delta(f) + \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} S_{U_o U_o}(f) &= \frac{1}{4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + (1 - 4\pi^2 f^2 LC)^2} \left[\delta(f) + \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \right] \\ &= \delta(f) + \frac{2a}{\left[4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + (1 - 4\pi^2 f^2 LC)^2 \right] (a^2 + 4\pi^2 f^2)} \end{aligned}$$

6. α. Να βρεθεί η φασματική πυκνότητα ισχύος της τάσης του θορύβου εξόδου στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος.

6. β. Δύο αντιστάσεις των 1000Ω βρίσκονται σε θερμοκρασία 300°K και 400°K αντίστοιχα. Να βρεθεί το φάσμα ισχύος της τάσης στους ακροδέκτες, αν οι δύο αντιστάσεις συνδέονται (i) σε σειρά και (ii) παράλληλα.



Απάντηση

α. 1ος τρόπος

Αφού υπάρχει μόνο μια "θορυβώδης" αντίσταση R σε θερμοκρασία T , το ισοδύναμο κύκλωμα παρουσιάζει σύνθετη αντίσταση εξόδου:

$$Z_o(f) = (R // j2\pi fL) \Rightarrow Z_o(f) = \frac{j2\pi fLR}{R + j2\pi fL} = \frac{4\pi^2 f^2 L^2 R + j2\pi fLR^2}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}$$

$$\text{οπότε } R_o(f) = \frac{4\pi^2 f^2 L^2 R}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}$$

$$\text{και συνεπώς } S_o(f) = 2kTR_o(f) = \frac{8kT\pi^2 f^2 L^2 R}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2} \quad (\text{A})$$

2ος τρόπος

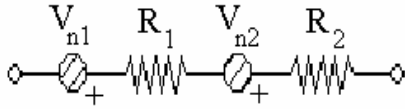
$$S_{U_o U_o}(f) = |H(f)|^2 S_{U_n U_n}(f)$$

$$\text{όπου } H(f) = \frac{U_o(f)}{U_n(f)} = \frac{j2\pi fL}{R + j2\pi fL} \text{ και } S_{U_n U_n}(f) = 2kTR$$

$$\text{οπότε } S_{U_o U_o}(f) = \frac{4\pi^2 f^2 L^2}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2} \cdot 2kTR = \frac{8kT\pi^2 f^2 L^2 R}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2} \quad (\text{B})$$

Τα αποτελέσματα των σχέσεων (A) και (B) είναι ίδια (γιατί;).

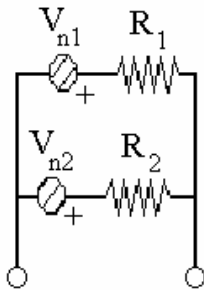
β. (i)



$$H_1(f) = \frac{V_o(f)}{V_{n_1}(f)} \Big|_{V_{n_2}=0} = 1 = H_2(f)$$

$$S_o(f) = 2kT_1R_1 + 2kT_2R_2 = 2 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 1000 \times 700 = 1.932 \times 10^{-17} \text{ [V}^2/\text{Hz]}$$

(ii)



$$H_1(f) = \frac{V_o(f)}{V_{n_1}(f)} \Big|_{V_{n_2}=0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ και } H_2(f) = \frac{V_o(f)}{V_{n_2}(f)} \Big|_{V_{n_1}=0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$S_o(f) = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 2kT_1R_1 + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)^2 2kT_2R_2 = \frac{2kR_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} (R_2T_1 + R_1T_2)$$

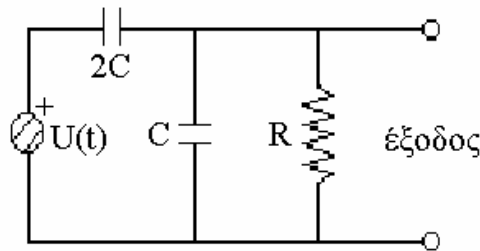
$$= \frac{2kR^2}{4R^2} R(T_1 + T_2) = \frac{kR}{2} (T_1 + T_2) = 4.83 \times 10^{-18}$$

7. Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος με $C = 10^{-2}$ μF και $R = 10$ $\text{k}\Omega$. Η είσοδος $U(t)$ είναι ένα σήμα με φασματική πυκνότητα ισχύος:

$$S_{UU}(f) = \begin{cases} P_0 & , |f| < f_0 \\ 0 & , |f| > f_0 \end{cases}$$

όπου $P_0 = 3 (\mu\text{V})^2/\text{Hz}$ και $f_0 = 10/6\pi \text{ kHz}$. Η αντίσταση του κυκλώματος βρίσκεται σε θερμοκρασία $T = 300 \text{ K}$ και δημιουργεί θερμικό θόρυβο. Να βρεθούν:

- Η φασματική πυκνότητα ισχύος του θερμικού θορύβου στην έξοδο.
- Η φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος στην έξοδο.
- Ο λόγος σήματος προς θόρυβο στην έξοδο.



Απάντηση

α) $S_{n_o n_o}(f) = 2kTR_o(f)$, με $R_o(f) = \text{Re}[Z_o(f)]$. Όμως,

$$Z_o^{-1}(f) = \frac{1}{R} + j2\pi fC + j2\pi f2C = \frac{1}{R} + j6\pi fC = \frac{1 + j6\pi fRC}{R} \Rightarrow Z_o(f) = \frac{R(1 - j6\pi fRC)}{1 + 36\pi^2 f^2 R^2 C^2},$$

οπότε $R_o(f) = \frac{R}{1 + 36\pi^2 f^2 R^2 C^2}$. Συνεπώς: $S_{n_o n_o}(f) = \frac{2kTR}{1 + 36\pi^2 f^2 R^2 C^2}$

β) $S_{U_o U_o}(f) = |H_V(f)|^2 S_{UU}(f)$

$$\text{όπου: } H_V(f) = \frac{U_o(f)}{U(f)} = \frac{(R // \frac{1}{j2\pi fC})}{(R // \frac{1}{j2\pi fC}) + \frac{1}{j4\pi fC}} = \frac{\frac{R}{1 + j2\pi fRC}}{\frac{R}{1 + j2\pi fRC} + \frac{1}{j4\pi fC}} = \frac{j4\pi fRC}{1 + j6\pi fRC}$$

$$\text{Συνεπώς: } S_{U_o U_o}(f) = \begin{cases} P_0 \frac{16\pi^2 f^2 R^2 C^2}{1 + 36\pi^2 f^2 R^2 C^2}, & |f| < f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$

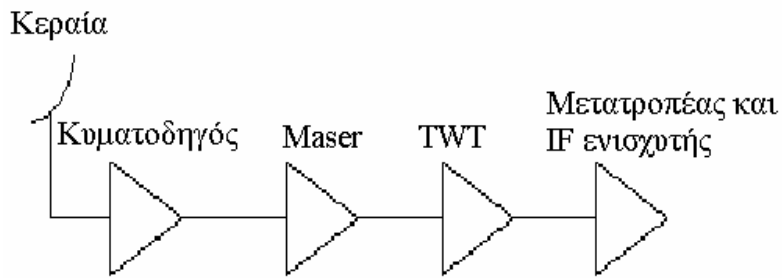
$$\gamma) \overline{U_o^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{U_o U_o}(f) df = P_0 \int_{-f_0}^{+f_0} \frac{16\pi^2 f^2 R^2 C^2}{1 + 36\pi^2 f^2 R^2 C^2} df$$

$$\begin{aligned}
&= P_0 16\pi^2 R^2 C^2 \int_{-f_0}^{+f_0} \frac{f^2}{1+36\pi^2 f^2 R^2 C^2} df = P_0 16\pi^2 R^2 C^2 \int_{-f_0}^{+f_0} \frac{f^2}{1+(f/f_1)^2} df \\
&= P_0 16\pi^2 R^2 C^2 f_1^3 \int_{-f_0/f_1}^{+f_0/f_1} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{P_0 16\pi^2 R^2 C^2}{216\pi^3 R^3 C^3} \left(x - \tan^{-1} x \right) \Big|_{-f_0/f_1}^{+f_0/f_1} \\
&= \frac{2P_0}{27\pi RC} \left[\frac{f_0}{f_1} - \tan^{-1} \left(\frac{f_0}{f_1} \right) \right] = \frac{4P_0}{27\pi RC} \left[f_0 6\pi RC - \tan^{-1}(f_0 6\pi RC) \right], \text{ όπου } f_1 = \frac{1}{6\pi RC}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{n_o^2(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{n_o n_o}(f) df = 2kTR \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{1+36\pi^2 f^2 R^2 C^2} = 2kTR \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{1+(f/f_1)^2} \\
&= 2kTR f_1 \tan^{-1} \left(\frac{f}{f_1} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2kTR}{6\pi RC} \pi = \frac{kT}{3C}
\end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } SNR = 10 \log \left[\frac{\overline{U_o^2(t)}}{\overline{n_o^2(t)}} \right] = 10 \log \left\{ \frac{4P_0}{27\pi RC} \cdot \frac{3C}{kT} \left[f_0 6\pi RC - \tan^{-1}(f_0 6\pi RC) \right] \right\} = 33.42 \text{ dB}$$

8. Έστω το σύστημα δέκτη τηλεπικοινωνιών μέσω δορυφόρου, το οποίο δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα χαρακτηριστικά των διαφόρων βαθμίδων είναι: Ενεργός θερμοκρασία θορύβου της κεραίας 14°K, απόσβεση κυματοδηγού 0.2 dB σε θερμοκρασία περιβάλλοντος $T_0 = 290^\circ\text{K}$, κέρδος και ενεργός θερμοκρασία θορύβου *MASER* 30 dB και 5°K, αντίστοιχα, συντελεστής θορύβου και κέρδος λυχνίας οδεύοντος κύματος (*TWT*) 6 dB και 20 dB, αντίστοιχα, συντελεστής θορύβου μετατροπέα και *IF* ενισχυτή 10 dB. Να υπολογιστούν η ενεργός θερμοκρασία θορύβου του δέκτη (χωρίς την κεραία) καθώς και ο αντίστοιχος συντελεστής θορύβου, και στη συνέχεια να βρεθεί η ισοδύναμη θερμοκρασία θορύβου του συστήματος.



Απάντηση

Κεραία: $T_{e_1} = 14^\circ\text{K}$

Κυματοδηγός: $L_2 = 10^{0.02} \Rightarrow g_2 = 1/L_2 = 10^{-0.02}$, $T_{e_2} = (L_2 - 1)T_0 = 13.67^\circ\text{K}$

MASER: $T_{e_3} = 5^\circ\text{K}$, $g_3 = 10^3$

TWT: $T_{e_4} = (F_4 - 1)T_0 = (10^{0.6} - 1) \times 290^\circ\text{K} = 864.51^\circ\text{K}$, $g_4 = 10^2$

Μετατροπέας και IF ενισχυτής: $T_{e_5} = (F_5 - 1)T_0 = (10 - 1) \times 290^\circ\text{K} = 2610^\circ\text{K}$

Συνεπώς: $T_e = T_{e_2} + \frac{T_{e_3}}{g_2} + \frac{T_{e_4}}{g_2 g_3} + \frac{T_{e_5}}{g_2 g_3 g_4} = 19.84^\circ\text{K}$, $F = 1 + \frac{T_e}{T_0} = 1.07$ ($\cong 0.29$ dB)

$T_{total} = T_{e_1} + T_e = 33.84^\circ\text{K}$