

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1.1 Ταξινόμηση των Σημάτων και των Συστημάτων

Ο όρος "σήμα" χρησιμοποιείται κυρίως στις Τηλεπικοινωνίες για την περιγραφή μιας "πληροφορίας", η οποία μεταδίδεται από ένα σημείο σε κάποιο άλλο. Γενικότερα, ως σήμα θεωρείται κάθε συνάρτηση του χρόνου ή άλλης μεταβλητής, που αντιπροσωπεύει κάποια φυσική ποσότητα, η οποία εμφανίζει ενδιαφέρον. Έτσι, σήμα είναι η ανθρώπινη ομιλία, μια εικόνα, κάποιο ηλεκτρικό μέγεθος (τάση, ρεύμα, κ.λ.π), η θερμοκρασία ενός πλανήτη, η ηχώ του *radar* ή του *sonar*, το εξαγόμενο ενός εγκεφαλογράφου, κ.λ.π. Τέτοια σήματα εμφανίζονται συνήθως σε συνδυασμό με κάποιο σύστημα, όπου ως σύστημα μπορεί να οριστεί ένας "νόμος", με τη βοήθεια του οποίου συνδέεται η έξοδος του (απόκριση) με την είσοδό του (διέγερση). Στην πιο απλή μορφή ένα σύστημα είναι όπως αυτό του Σχήματος 1.1, όπου το σήμα εισόδου $x(t)$ μπορεί να αντιπροσωπεύει κάποιο μήνυμα, το σύστημα μπορεί να είναι η συσκευή μέτρησης και το $y(t)$ να είναι η μέτρηση του $x(t)$.



Σχήμα 1.1. Απεικόνιση συστήματος υπό μορφή "block".

Αν R είναι ο νόμος, που συνδέει την διέγερση με την απόκριση, τότε:

$$y(t) = R[x(t)] \quad (1.1)$$

Γραμμικό είναι το σύστημα, για το οποίο ισχύει η αρχή της επαλληλίας, δηλαδή αν $y_1(t) = R[x_1(t)]$ και $y_2(t) = R[x_2(t)]$, τότε:

$$R[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \quad (1.2)$$

όπου α_1 και α_2 είναι σταθερές ανεξάρτητες του χρόνου. Κάθε σύστημα, το οποίο δεν ικανοποιεί την παραπάνω προϋπόθεση, είναι **μη γραμμικό**.

Ως **χρονικά αμετάβλητο** ή **σταθερό** χαρακτηρίζεται ένα σύστημα, στο οποίο μια χρονική καθυστέρηση στη διέγερση καταλήγει σε αντίστοιχη χρονική καθυστέρηση στην απόκριση:

$$y(t - t_0) = R[x(t - t_0)] \text{ για κάθε } t_0 = \text{σταθερό} \quad (1.3)$$

Είναι προφανές ότι η έξοδος ενός χρονικά αμετάβλητου συστήματος εξαρτάται από τις χρονικές διαφορές και όχι από τις απόλυτες τιμές του χρόνου. Κάθε σύστημα, που δεν ικανοποιεί την προϋπόθεση αυτή, ονομάζεται **χρονικά μεταβαλλόμενο**.

Αιτιατό λέγεται ένα σύστημα, το οποίο δεν έχει απόκριση πριν εφαρμοστεί σ' αυτό διέγερση. Ισοδύναμα, η απόκριση ενός αιτιατού συστήματος σε κάποια χρονική στιγμή $t = t_0$ εξαρτάται από τις τιμές της διέγερσης για $t \leq t_0$. Ένα αιτιατό σύστημα, στο οποίο ο νόμος R είναι φυσικά ή τεχνικά υλοποιήσιμος, λέγεται **υλοποιήσιμο**. Παράδειγμα ενός μη υλοποιήσιμου συστήματος είναι το $y(t) = ix(t)$, όπου i είναι η φανταστική μονάδα.

Δυναμικό λέγεται το σύστημα, του οποίου η απόκριση $y(t)$ σε κάποια χρονική στιγμή $t = t_0$ εξαρτάται από τη διέγερσή του $x(t)$ για $t \neq t_0$, ενώ λέγεται και **σύστημα με μνήμη**. Στις τηλεπικοινωνίες μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα συστήματα, για τα οποία οι ιδιότητες της γραμμικότητας και της χρονικής σταθερότητας ισχύουν ταυτόχρονα. Μια σπουδαία ιδιότητα των συστημάτων αυτών είναι ότι η είσοδος και η έξοδος συνδέονται μεταξύ τους μέσω μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές της μορφής:

$$\alpha_0 y(t) + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (1.4)$$

Μάλιστα, στην περίπτωση κατά την οποία η διέγερση είναι αρμονικής μορφής, π.χ. $x(t) = \exp(i\omega t)$, τότε η απόκριση του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση είναι της μορφής $y(t) = H(\omega)\exp(i\omega t)$, όπου η συνάρτηση $H(\omega)$ λέγεται **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος και δίνεται από τη σχέση:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k (i\omega)^k} \quad (1.5)$$

Η φυσική σημασία των προηγούμενων είναι ότι η απόκριση ενός γραμμικού – χρονικά σταθερού συστήματος σε αρμονική διέγερση είναι αρμονική και της ίδιας συχνότητας (ω) με τη διέγερση. Δοθέντος ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση αυτή μπορεί να γραφεί:

$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp[i\theta(\omega)] \quad (1.6)$$

όπου η συνάρτηση $|H(\omega)|$ ονομάζεται **απόκριση πλάτους** του συστήματος και η $\theta(\omega)$ **ολίσθηση φάσης** ή απλά **φάση** του συστήματος. Στη συνέχεια, θα γίνει η ταξινόμηση των σημάτων.

Έχοντας υπόψη ότι κάποιο σήμα $x(t)$ είναι μια συνάρτηση του χρόνου, ένας τρόπος διαίρεσης των σημάτων μπορεί να γίνει με τον καθορισμό του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών της συνάρτησης $x(t)$. Με βάση τα παραπάνω τα σήματα μπορούν να διαιρεθούν σε δύο γενικές κατηγορίες.

1.1.1 Σήματα συνεχούς χρόνου

Στα σήματα αυτά, η ανεξάρτητη μεταβλητή (χρόνος) παίρνει συνεχείς τιμές. Ανάλογα με το πεδίο τιμών τα συστήματα αυτά μπορούν να διαιρεθούν σε δύο είδη:

α) Αναλογικά σήματα

Είναι τα σήματα εκείνα των οποίων η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει κι αυτή συνεχείς τιμές. Παράδειγμα τέτοιου σήματος είναι το $x(t) = 3t$.

β) Διακριτά σήματα συνεχούς χρόνου

Είναι σήματα συνεχούς χρόνου, των οποίων η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει διακριτές

τιμές. Παράδειγμα τέτοιου σήματος είναι το $x(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & , 1 < t \leq 2 \\ 0 & , t < 0 , t > 2 \end{cases}$.

1.1.2 Σήματα διακριτού χρόνου

Στα σήματα αυτά ο χρόνος παίρνει μόνο διακριτές τιμές, οπότε τα σήματα αυτά συμβολίζονται σαν ακολουθίες. Φυσικά κι αυτά μπορούν να διαιρεθούν σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η εξαρτημένη μεταβλητή:

α) Αναλογικά σήματα διακριτού χρόνου

Στα σήματα αυτά η εξαρτημένη μεταβλητή περιγράφεται από μια συνεχή συνάρτηση και ένα τέτοιο σήμα είναι το $x(t) = A \exp(-t)$, όπου t παίρνει ακέραιες τιμές.

β) Ψηφιακά σήματα διακριτού χρόνου

Στα σήματα αυτά η εξαρτημένη μεταβλητή δεν περιγράφεται από μια συνεχή συνάρτηση και ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} t & , t \text{ \textit{αρτιος ακεραιος} } \\ 2t+1 & , t \text{ \textit{περιττος ακεραιος} } \end{cases}$$

Ένας άλλος τρόπος κατάταξης των σημάτων, πιο γενικός από τον προηγούμενο, βασίζεται στο είδος των μαθηματικών τους μοντέλων. Έτσι, τα σήματα διακρίνονται σε **απλά** (ή **ντετερμινιστικά**) και σε **στοχαστικά**. Τα απλά σήματα χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι σχεδόν πάντα μπορούν να περιγραφούν με απλές μαθηματικές εκφράσεις, ενώ παράλληλα δεν υπάρχει καμία αβεβαιότητα για τη φύση τους προτού να "συμβούν". Αντίθετα, στοχαστικά είναι τα σήματα, τα οποία δεν μπορούν να καθοριστούν ή να προβλεφθούν πριν να "συμβούν", οπότε δεν είναι δυνατή η περιγραφή τους με αναλυτικές μαθηματικές εκφράσεις. Στην πραγματικότητα ένα στοχαστικό σήμα είναι μια οικογένεια από απλά σήματα με κοινά πιθανοτικά χαρακτηριστικά. Σημειώνεται ότι τόσο τα απλά όσο και τα στοχαστικά σήματα μπορούν να συνδυαστούν με τις προαναφερθείσες κατηγορίες (π.χ. στοχαστικό διακριτό σήμα συνεχούς χρόνου κ.λ.π.).

Στη συνέχεια, θα αναφερθούν ορισμένες κατηγορίες ή ειδικές μορφές σημάτων, τις οποίες είναι βέβαιο ότι ο αναγνώστης έχει συναντήσει αρκετές φορές στο παρελθόν. Ο λόγος, για τον οποίο γίνεται η επανάληψη αυτή, είναι η δημιουργία μιας κοινής βάσης μεταξύ των συγγραφέων και του αναγνώστη, η οποία θα διευκολύνει την παρουσίαση της ύλης. Αξίζει να σημειωθεί ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα γίνει

αναφορά μόνο σε αναλογικά σήματα, ενώ η επέκταση στους διάφορους άλλους τύπους σημάτων κρίνεται τετριμμένη και γι' αυτό έχει παραλειφθεί.

1.1.3 Περιοδικά σήματα

Ένα αναλογικό σήμα $x(t)$ καλείται **περιοδικό**, αν υπάρχει κάποια σταθερά T , έτσι ώστε να ισχύει:

$$x(t) = x(t + T) \text{ για κάθε } t \quad (1.7)$$

Φυσικά ισχύει και η πιο γενική έκφραση $x(t) = x(t + \kappa T)$ (κ ακέραιος). Η σταθερά T ονομάζεται **περίοδος**, ενώ το αντίστροφο της $1/T$ ονομάζεται **θεμελιώδης συχνότητα**.

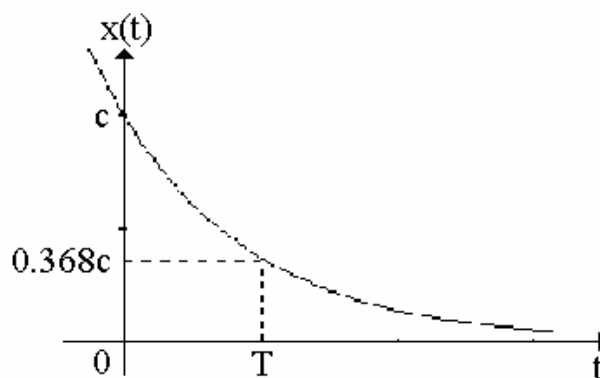
1.1.4 Εκθετικά σήματα

Τα σήματα αυτά αποτελούν μια πολύ σημαντική κατηγορία σημάτων και έχουν γενικά τη μορφή:

$$x(t) = c \cdot a^{st} \quad (1.8)$$

όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός, που τις περισσότερες φορές ισούται με $e = 2.7183\dots$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η σταθερά s μπορεί να έχει τιμές πραγματικές (θετικές ή αρνητικές) ή μιγαδικές, διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

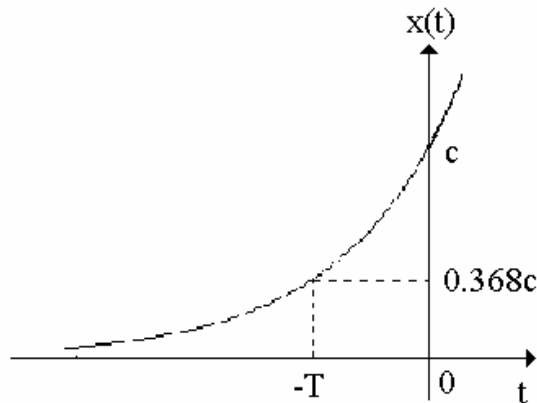
α) s αρνητικός και πραγματικός



Σχήμα 1.2.α. Εκθετικό σήμα με $s = -1/T$.

Αν $s = -1/T$ ($T > 0$), τότε $x(t) = c \cdot \exp(-t/T)$ και το σήμα έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 1.2α. Η σταθερά T ονομάζεται **σταθερά χρόνου** και δίνει το ρυθμό ελάττωσης του σήματος. Συγκεκριμένα, $x(T) = 0.368c$, ενώ $x(5T) = 0.0067c$, οπότε κάποιος μπορεί να εκτιμήσει ότι μετά από χρόνο $t = 5T$ το σήμα είναι αμελητέο.

β) s θετικός και πραγματικός



Σχήμα 1.2.β. Εκθετικό σήμα με $s = 1/T$.

Αν $s = 1/T$, τότε $x(t) = c \cdot \exp(t/T)$ και το σήμα έχει τη μορφή του Σχήματος 1.2β και τα συμπεράσματα είναι ανάλογα με αυτά της προηγούμενης περίπτωσης.

γ) s μιγαδικός

Αν $s = i\omega$, τότε $x(t) = c \cdot \exp(i\omega t) = c(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ και το σήμα αυτό είναι στην ουσία ένα "μιγαδικό ημιτονοειδές σήμα" με περίοδο $T = 2\pi/\omega$. Είναι προφανές ότι το μέτρο του $x(t)$ είναι ίσο με $|c|$.

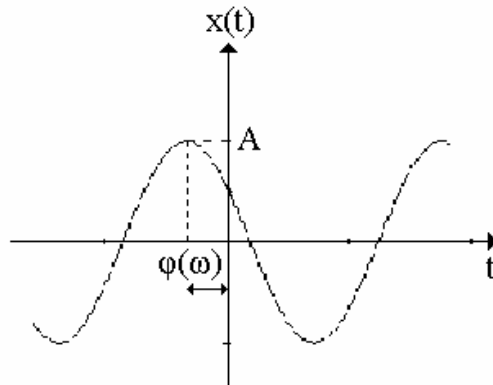
1.1.5 Ημιτονοειδή σήματα

Τα σήματα αυτά παίζουν πρωταρχικό ρόλο στις Τηλεπικοινωνίες, αφού με τη βοήθεια τους παριστάνονται ραδιοκύματα, εναλλασσόμενα ηλεκτρικά μεγέθη, ηχητικά κύματα κ.λ.π. Επίσης, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, όλα τα περιοδικά σήματα μπορούν να

περιγραφούν με τη βοήθεια των σειρών *Fourier*, όπως θα φανεί παρακάτω. Το γενικό ημιτονοειδές σήμα (Σχήμα 1.3) εκφράζεται ως:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \varphi + \pi/2) \quad (1.9)$$

όπου οι σταθερές A , ω , φ και $T = 2\pi/\omega$ είναι το πλάτος, η γωνιακή συχνότητα, η φάση και η περίοδος, αντίστοιχα, ενώ το όρισμα $(\omega t + \varphi)$ ονομάζεται **γωνία**.



Σχήμα 1.3. Το ημιτονοειδές σήμα.

1.1.6 Η συνάρτηση δέλτα

Μια από τις πιο σημαντικές κατηγορίες σημάτων είναι τα λεγόμενα **ωστικά** ή **κρουστικά** σήματα, ο σημαντικότερος εκπρόσωπος των οποίων είναι η συνάρτηση δέλτα, που συνήθως συμβολίζεται με $\delta(t)$. Ένας τρόπος για να εκφράσει (και όχι να ορίσει) κανείς τη συνάρτηση $\delta(t)$ είναι ο ακόλουθος:

$$\delta(t) = 0 \text{ για } t \neq 0 \quad (1.10)$$

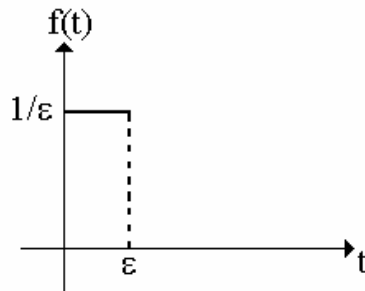
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1 \quad (1.11)$$

ενώ η τιμή της στο σημείο $t = 0$ είναι απροσδιόριστη. Σημειώνεται ότι αν η συνάρτηση αυτή μετατοπιστεί στο $t = t_0$, τότε η αντίστοιχη έκφρασή της είναι:

$$\delta(t - t_0) = 0 \text{ για } t \neq t_0 \quad (1.12)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (1.13)$$

Βέβαια, ένας απλός τρόπος για να αποκτήσει κανείς μια εποπτική εικόνα για τη $\delta(t)$ είναι να τη θεωρήσει ως το όριο ενός παλμού διάρκειας ε ($\varepsilon \rightarrow 0$) (Σχήμα 1.4).



Σχήμα 1.4. Εποπτικός τρόπος παρουσίασης της συνάρτησης $\delta(t)$.

Η $\delta(t)$ μπορεί να οριστεί και μέσω της θεωρίας των Κατανομών με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω, μια συνάρτηση $\varphi(t)$, η οποία ονομάζεται **συνάρτηση δοκιμής**, που είναι συνεχής στο σημείο $t = 0$ και μηδενίζεται έξω από ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Τότε η $\delta(t)$ ορίζεται μέσω του ολοκληρώματος:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0) \quad (1.14)$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό μπορούν να αποδειχτούν οι ακόλουθες ιδιότητες της συνάρτησης $\delta(t)$:

$$\alpha) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t+t_0)dt = \varphi(t_0) \quad (\text{Ιδιότητα της μετατόπισης}) \quad (1.15)$$

$$\beta) \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t_0)g(t)dt = \begin{cases} g(t_0), & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0, & t_0 < t_1 \text{ ή } t_0 > t_2 \end{cases} \quad (t_2 > t_1) \quad (1.16)$$

για κάθε συνάρτηση $g(t)$ συνεχή στο $t = t_0$.

$$\gamma) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha t)\varphi(t)dt = \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t/\alpha)dt = \frac{1}{|\alpha|} \varphi(0) \quad (\text{Ιδιότητα της κλιμάκωσης}) \quad (1.17)$$

$$\delta) \quad \text{Αν } \alpha < b, \text{ τότε } \int_{\alpha}^b \delta(t-t_0)dt = \begin{cases} 1, & \alpha < t_0 < b \\ 0, & t_0 < \alpha \text{ ή } t_0 > b \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\varepsilon) \quad f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \text{ όπου } f(t) \text{ είναι μια συνάρτηση συνεχής στο } t = 0, \quad (1.19)$$

$$\sigma\tau) \quad \delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(t), \alpha \in \mathfrak{R} \quad (1.20)$$

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι αν $\alpha = -1$, τότε η σχέση (1.20) δηλώνει ότι η $\delta(t)$ είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή $\delta(t) = \delta(-t)$.

ζ) Η $\delta(t)$ έχει παραγώγους. Συμβολίζοντας με $d^n \delta(t)/dt^n = \delta^{(n)}(t)$ τη n -οστή παράγωγο της $\delta(t)$, δίνεται ο ακόλουθος ορισμός:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t)\varphi(t)dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(0) \quad (1.21)$$

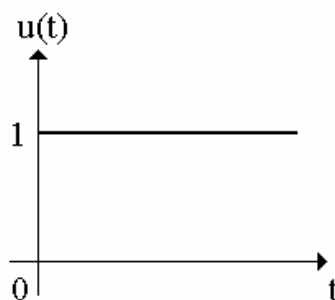
$$\text{όπου } \varphi^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} \right|_{t=0}$$

1.1.7 Η βηματική συνάρτηση

Η συνάρτηση αυτή συμβολίζεται με $u(t)$ [αρκετά συχνά συμβολίζεται και με $\mathcal{U}(t)$]. Από το Σχήμα 1.5 γίνεται φανερό ότι η συνάρτηση $u(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \\ ? & , \quad t = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

όπου ο συμβολισμός "?" δηλώνει ότι η συνάρτηση $u(t)$ είναι απροσδιόριστη στο $t = 0$.



Σχήμα 1.5. Η βηματική συνάρτηση $u(t)$.

Θεωρώντας, όπως και για τη συνάρτηση $\delta(t)$, ότι η $u(t)$ είναι μια συνάρτηση κατανομής μπορεί να δοθεί ο ακόλουθος ορισμός:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt \quad (1.23)$$

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα της βηματικής συνάρτησης είναι ότι η πρώτη παράγωγός της είναι ίση με τη συνάρτηση $\delta(t)$:

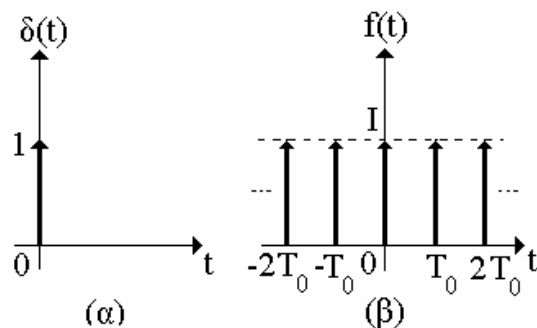
$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1.24)$$

1.1.8 Το τραίνο ώσεων

Το σήμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$f(t) = I \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \delta(t - \kappa T_0), \text{ όπου } \kappa \text{ ακέραιος} \quad (1.25)$$

Στο Σχήμα 1.6 έχουν σχεδιαστεί η συνάρτηση $\delta(t)$ και το τραίνο ώσεων.



Σχήμα 1.6. (α) Η συνάρτηση $\delta(t)$ και (β) το τραίνο ώσεων.

1.1.9 Σήματα παλμών

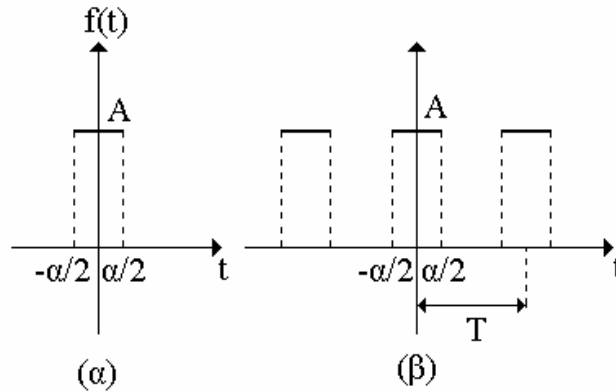
Το σήμα σχήματος παλμού (Σχήμα 1.7α) δίνεται από την εξίσωση:

$$f(t) = \begin{cases} A & , |t| < \alpha/2 \\ 0 & , |t| > \alpha/2 \end{cases} \quad (1.26)$$

Στην περίπτωση του τραίνου παλμών, η συνάρτηση $f(t)$ επαναλαμβάνεται περιοδικά με περίοδο T , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.7β. Είναι φανερό ότι η συνάρτηση σχήματος παλμού $f(t)$ της εξίσωσης (1.26) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης ως:

$$f(t) = A[u(t + \frac{\alpha}{2}) - u(t - \frac{\alpha}{2})] \quad (1.27)$$

Με τον ίδιο τρόπο, αλλά σαν άπειρη σειρά, μπορεί να γραφεί και το τράινο ώσεων.



Σχήμα 1.7. (α) Το σήμα σχήματος παλμού και (β) το τράινο παλμών.

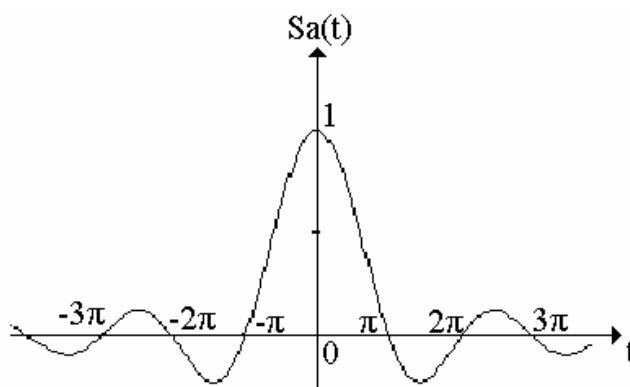
1.1.10 Η συνάρτηση δειγματοληψίας

Μια συνάρτηση με ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας, η οποία συνήθως συμβολίζεται με $Sa(t)$ και ορίζεται από τη σχέση:

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}, \text{ ή πιο γενικά } Sa(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t} \quad (1.28)$$

και η μορφή της δίνεται στο Σχήμα 1.8. Η συνάρτηση δειγματοληψίας $Sa(t)$ είναι άρτια συνάρτηση, με απόλυτη μέγιστη τιμή στο μηδέν $Sa(0) = 1$, ενώ μηδενίζεται στα σημεία $t = \pm n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$). Τέλος, τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης δειγματοληψίας παρουσιάζονται στο μέσο περίπου των αποστάσεων μεταξύ των σημείων μηδενισμού, δηλαδή στα σημεία $t_n \cong \pm(n+1/2)\pi$, για τα οποία ισχύει $|\sin t_n| = 1$. Η προσέγγιση αυτή γίνεται ακριβέστερη καθώς το t_n απομακρύνεται από το μηδέν, ενώ οι τιμές της συνάρτησης στις θέσεις των τοπικών ακρότατων δίνονται προσεγγιστικά από τη σχέση:

$$Sa[\pm(n+1/2)\pi] = \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} \quad (1.29)$$



Σχήμα 1.8. Η συνάρτηση δειγματοληψίας $Sa(t)$.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, θα ήταν σκόπιμο να τονιστεί ότι τα σήματα των ειδικών μορφών (ημιτονοειδή, κρουστικά, κ.λ.π.), που παρουσιάστηκαν παραπάνω, αν και φαίνονται άσχετα μεταξύ τους, παρόλα αυτά έχουν πολύ μεγάλη συγγένεια (ανά ορισμένα ζεύγη φυσικά) στο πεδίο της συχνότητας (π.χ. ο μετασχηματισμός *Fourier* του παλμού είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας). Πριν ολοκληρωθεί η παράγραφος της ταξινόμησης των σημάτων και των συστημάτων, θα δοθούν οι ορισμοί των μέσων και ενεργών τιμών καθώς και της ενέργειας και της ισχύος των σημάτων. Οι ορισμοί αυτοί θα οδηγήσουν σε μια ακόμη διαίρεση των σημάτων, στα σήματα ενέργειας και στα σήματα ισχύος.

1.1.11 Μέσες και ενεργές τιμές σημάτων

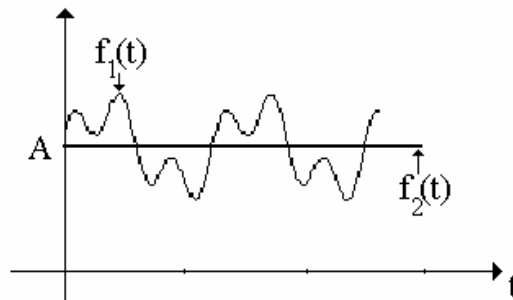
Η **μέση τιμή** ενός σήματος $f(t)$ σε κάποιο διάστημα $[t_1, t_2]$, η οποία συμβολίζεται με $\overline{f(t)}$, ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (1.30)$$

Είναι φανερό ότι για ένα περιοδικό σήμα η μέση τιμή είναι σκόπιμο να οριστεί για μια περίοδο T :

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (1.31)$$

Φυσικά η μέση τιμή ενός ημιτονοειδούς σήματος είναι μηδέν, όταν για χρονικό διάστημα ληφθεί μια περίοδος, ενώ για ένα σταθερό σήμα ($f(t) = c$) η μέση τιμή του είναι ίση με c . Στο Σχήμα 1.9 δίνονται δύο σήματα, το $f_1(t)$ και το $f_2(t)$, που έχουν την ίδια μέση τιμή A , από όπου γίνεται φανερό το όνομα *DC*, που συναντά κανείς στην Ηλεκτρονική, για τη μέση τιμή.



Σχήμα 1.9. Δύο σήματα $f_1(t)$ και $f_2(t)$ με ίδια μέση τιμή.

Η ενεργός τιμή (*Root Mean Squared* ή *RMS*) ενός σήματος $f(t)$ δίνεται από την εξίσωση:

$$f(t)_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt} \quad (1.32)$$

ενώ για ημιτονοειδή σήματα ισχύει η σχέση $f(t)_{RMS} = A/\sqrt{2}$, όπου A είναι το πλάτος του ημιτονοειδούς σήματος.

1.1.12 Ενέργεια και ισχύς σημάτων

Όπως είναι γνωστό για ηλεκτρικά σήματα $x(t)$, όπου το $x(t)$ παριστάνει είτε μια διαφορά δυναμικού (τάση) $U(t)$ είτε ένα ηλεκτρικό ρεύμα $i(t)$, η στιγμιαία ισχύς, που καταναλώνεται σε μια αντίσταση R , είναι $P(t) = |U(t)|^2/R = |i(t)|^2 R$. Αν η αντίσταση είναι μοναδιαία ($R = 1 \Omega$), η στιγμιαία ισχύς εξαρτάται με τον ίδιο τρόπο από την τάση ή το ρεύμα, $P(t) = U^2(t) = i^2(t)$, όπου η τελευταία σχέση ισχύει βέβαια μόνο για

πραγματικές συναρτήσεις. Γενικεύοντας, μπορεί να οριστεί ως **στιγμιαία ισχύ** ενός σήματος $x(t)$ το τετράγωνο του $x(t)$:

$$P(t) = x^2(t) \quad (1.33)$$

Η παραπάνω σχέση καθώς και οι παραστάσεις, που έχει κανείς από τον Ηλεκτρισμό (ενέργεια που καταναλώνεται σε μοναδιαία αντίσταση), μπορούν να οδηγήσουν στον ορισμό της ενέργειας E_{t_1, t_2} σε χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$:

$$E_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \quad (1.34)$$

Όμοια, η μέση ισχύς $\overline{P(t)}$ στο διάστημα $[t_1, t_2]$ του σήματος $x(t)$ ορίζεται ως εξής:

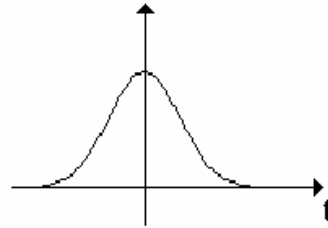
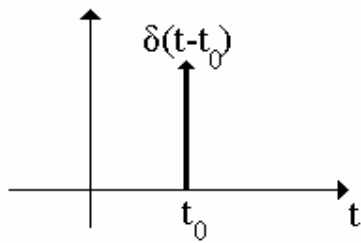
$$\overline{P(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = x^2(t)_{RMS} \quad (1.35)$$

Με βάση τα παραπάνω δίνονται οι ακόλουθοι ορισμοί: **Σήμα ισχύος** είναι ένα σήμα, το οποίο έχει πεπερασμένη μέση ισχύ, όταν το διάστημα $t_2 - t_1$ τείνει στο άπειρο, ενώ **σήμα ενέργειας** είναι ένα σήμα, το οποίο έχει πεπερασμένη ενέργεια, όταν το διάστημα $t_2 - t_1$ τείνει στο άπειρο. Παραδείγματα σημάτων ισχύος και σημάτων ενέργειας φαίνονται στο Σχήμα 1.10. Σήματα ισχύος είναι τα περιοδικά σήματα και αρκετά μη περιοδικά (π.χ. η συνάρτηση δέλτα, η σταθερά, κ.λ.π.), ενώ σήματα ενέργειας είναι οι παλμοί (τριγωνικοί, τετραγωνικοί, *Gauss* κ.λ.π.), το διπλό εκθετικό $x(t) = \exp(-|a|t)$ κ.λ.π.

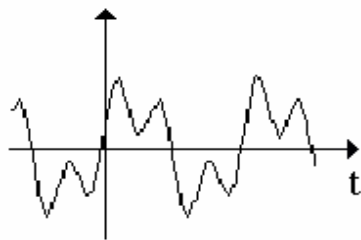
1.2 Σειρές *Fourier* και Φάσματα Περιοδικών Σημάτων

Ένα από τα κυριότερα προβλήματα που συναντώνται στις Τηλεπικοινωνίες αλλά και στους περισσότερους κλάδους των θετικών επιστημών, είναι η εύρεση τρόπων προσδιορισμού ή περιγραφής ενός σήματος. Η πλέον συνήθης τεχνική είναι η επέκταση του σήματος σε γραμμική σειρά άλλων σημάτων. Με τον τρόπο αυτό, ακόμα και σήματα, των οποίων η αναλυτική έκφραση δεν είναι γνωστή, μπορούν να προσδιοριστούν με τη γνώση λίγων μόνο συντελεστών της σειράς. Το μαθηματικό

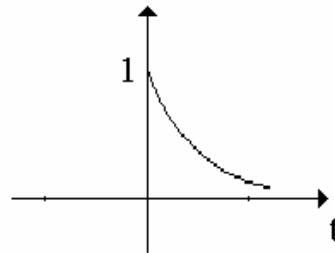
υπόβαθρο όλων των επεκτάσεων σε σειρά (*Fourier, Bessel, Laguerre, Whittaker* κ.λ.π.) είναι η θεωρία διανυσματικών χώρων με εσωτερικό γινόμενο. Αποφεύγοντας την αυστηρή μαθηματική γλώσσα και θεμελίωση θα δοθεί προσοχή στο πρόβλημα της επέκτασης ενός σήματος σε γραμμική σειρά. Αξίζει στο σημείο αυτό να δοθούν οι ακόλουθοι ορισμοί, που είναι πολύ πιθανό ότι ο αναγνώστης έχει ξανασυναντήσει σε βασικά πανεπιστημιακά μαθήματα.



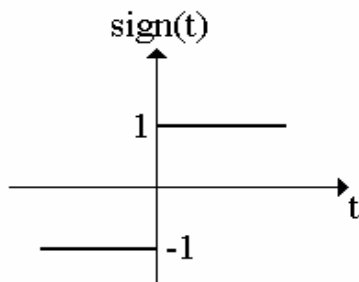
ο παλμός Gauss



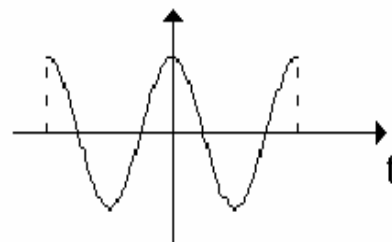
περιοδικό σήμα



το σήμα $\exp(-t)u(t)$



(α)



συνημιτονικός παλμός

(β)

Σχήμα 1.10. (α) Σήματα ισχύος και (β) σήματα ενέργειας.

Έστω δύο σήματα $f(t)$ και $g(t)$, τα οποία γενικά θεωρούνται μιγαδικές συναρτήσεις, ορισμένες σε κάποιο διάστημα $[t_1, t_2]$. Το **εσωτερικό γινόμενο** τους, ο οποίος είναι κάποιος αριθμός, ορίζεται ως εξής:

$$(f(t), g(t)) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)g^*(t)dt \quad (1.36)$$

όπου το σύμβολο "*" σημαίνει μιγαδικός συζυγής. Αξίζει να σημειωθεί η ομοιότητα του ορισμού της εξίσωσης (1.36) με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου στον

Ευκλείδειο χώρο, όπου όταν $\vec{f} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}$ και $\vec{g} = g_1 \vec{i} + g_2 \vec{j} + g_3 \vec{k}$, τότε

$\vec{f} \cdot \vec{g} = (f, g) = \sum_{\ell=1}^3 f_{\ell} g_{\ell}$. Όταν ισχύει $(f, g) = 0$ στο διάστημα $[t_1, t_2]$, τότε τα σήματα

ονομάζονται **ορθογώνια** στο διάστημα αυτό. Η απόσταση μεταξύ των παραπάνω δύο σημάτων μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια του **μέτρου** ή **νόρμας** (*norm*). Λαμβάνοντας υπόψη ότι το **μέτρο** της συνάρτησης $f(t)$ ορίζεται ως:

$$|f(t)| = (f(t), f(t))^{1/2} = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt} \quad (1.37)$$

μπορεί να οριστεί η **απόσταση** $d(f, g)$ μεταξύ των $f(t)$ και $g(t)$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$d(f, g) = |f(t) - g(t)| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |f(t) - g(t)|^2 dt} \quad (1.38)$$

Από τις εξισώσεις (1.37) και (1.38) είναι φανερή η ομοιότητα των ορισμών αυτών με

εκείνους, που ισχύουν στον Ευκλείδειο χώρο, όπου το μέτρο του διανύσματος \vec{f} και η

απόσταση μεταξύ των διανυσμάτων \vec{f} και \vec{g} δίνονται από τις σχέσεις $|\vec{f}| = \sqrt{\sum_{\ell=1}^3 f_{\ell}^2}$

και $|\vec{f} - \vec{g}| = \sqrt{\sum_{\ell=1}^3 (f_{\ell} - g_{\ell})^2}$, αντίστοιχα.

Έστω, τέλος, τα σήματα $\varphi_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) για τα οποία ισχύει:

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ \kappa_n \in \mathfrak{R} & , n = m \end{cases} \quad (1.39)$$

Είναι φανερό ότι κάθε σήμα-μέλος του συνόλου $\{\varphi_n(t)\}$ είναι ορθογώνιο με όλα τα άλλα σήματα – μέλη του. Αν, επιπλέον, ισχύει ότι $\kappa_n = 1$ για κάθε n , τότε το σύστημα των συναρτήσεων $\varphi_n(t)$ ονομάζεται **ορθοκανονικό ή βάση ή σύστημα συντεταγμένων**.

Επανερχόμενοι στο αρχικό πρόβλημα της προσέγγισης του σήματος $x(t)$ με κάποιο γραμμικό συνδυασμό άλλων σημάτων $\varphi_n(t)$ δίνονται χωρίς απόδειξη τα ακόλουθα θεωρήματα.

1ο Θεώρημα (Επέκταση σε σειρά)

Έστω ότι το σήμα $x(t)$ προσεγγίζεται από το σήμα $\hat{x}(t)$, όπου με $\hat{x}(t)$ συμβολίζεται ο γραμμικός συνδυασμός των σημάτων $\varphi_n(t)$, δηλαδή:

$$x(t) \approx \hat{x}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n(t) \quad (1.40)$$

Για να είναι η απόσταση μεταξύ των $x(t)$ και $\hat{x}(t)$ ελάχιστη, πρέπει οι συντελεστές c_n της επέκτασης να δίνονται από τη σχέση:

$$c_n = (x(t), \varphi_n(t)) \quad (1.41)$$

Σημειώνεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή, αν $c_n = (x(t), \varphi_n(t))$, τότε η διαφορά των $x(t)$ και $\hat{x}(t)$ είναι ελάχιστη.

2ο Θεώρημα (Ορθογωνιακή αρχή)

Αν οι συντελεστές c_n καθιστούν ελάχιστο το μέτρο του σφάλματος ε της επέκτασης ($\varepsilon = |x(t) - \hat{x}(t)|$), τότε το σήμα του σφάλματος $x(t) - \hat{x}(t)$ είναι ορθογώνιο σε όλα τα $\varphi_n(t)$. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή, αν το σήμα σφάλματος είναι ορθογώνιο στα $\varphi_n(t)$, τότε τα c_n είναι τέτοια, ώστε το ε να είναι ελάχιστο.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι για την επέκταση ενός σήματος $x(t)$ σε γραμμικό συνδυασμό κάποιων σημάτων $\varphi_n(t)$, πρέπει να διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις:

- α) Αν τα $\varphi_n(t)$ αποτελούν βάση, τότε τα c_n βρίσκονται με το πρώτο θεώρημα [εξίσωση (1.41)].
- β) Αν τα $\varphi_n(t)$ δεν αποτελούν βάση, τότε τα c_n προκύπτουν από τη λύση του συστήματος N εξισώσεων:

$$\int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \sum_{\ell=1}^N c_{\ell} \varphi_{\ell}(t)] \varphi_n dt = 0 \quad (1.42)$$

Είναι προφανές ότι η εύρεση βάσεων αποτελεί ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ανάπτυξη ενός σήματος σε σειρές ημιτονοειδών σημάτων, δηλαδή σε σειρές *Fourier*, οι οποίες παρουσιάζουν το μεγάλο πλεονέκτημα σε σχέση με άλλες εναλλακτικές σειρές ότι οδηγούν στην έννοια των φασμάτων, τα οποία είναι απαραίτητα στην παρακολούθηση των πληροφοριών, που μεταφέρουν τα σήματα. Μάλιστα, απαραίτητη προϋπόθεση για ένα σήμα $f(t)$ να αναπτύσσεται σε σειρά *Fourier* είναι να ικανοποιεί τις λεγόμενες **συνθήκες Dirichlet**, οι οποίες είναι:

- i) Η συνάρτηση $f(t)$ να είναι μονοσήμαντη στο διάστημα $[t_1, t_2]$.
- ii) Να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων στο διάστημα $[t_1, t_2]$.
- iii) Να έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου μεγέθους στο διάστημα $[t_1, t_2]$.

- iv) Να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[t_1, t_2]$, δηλαδή $\int_{t_1}^{t_2} |f(t)| dt < \infty$.

Σημειώνεται ότι, αν η $f(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση, η επέκταση της σε σειρά *Fourier* ισχύει για όλο το πεδίο ορισμού της (η περίοδος $T = t_2 - t_1$). Ακόμα, πρέπει να υπογραμμιστεί ότι οι συνθήκες *Dirichlet* ισχύουν για όλα τα φυσικά σήματα. Ανάλογα, με τη βάση $\varphi_n(t)$ που χρησιμοποιείται, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθες επεκτάσεις.

1.2.1 Τριγωνομετρική σειρά *Fourier* μορφής A

Η βάση αποτελείται από τα σήματα:

$$\varphi_{1n}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(n\omega_0 t), \quad \varphi_{2n}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(n\omega_0 t), \quad \varphi_{10} = \frac{1}{\sqrt{T}} \quad (1.43)$$

όπου $\omega_0 = 2\pi/(t_2 - t_1) = 2\pi/T$. Εύκολα μπορεί να αποδειχτεί ότι τα σήματα αυτά αποτελούν βάση, οπότε το σήμα $f(t)$ γράφεται:

$$f(t) = c_{10}\varphi_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{1n}\varphi_{1n} + c_{2n}\varphi_{2n}) \quad (1.44)$$

Κάνοντας χρήση των ορισμών (1.41) για τον υπολογισμό των συντελεστών μπορεί να βρεθεί ότι:

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (1.45)$$

όπου

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt, \quad \alpha_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{και} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (1.46)$$

Οι συντελεστές α_0 , α_n και b_n ονομάζονται **συντελεστές *Fourier***.

1.2.2 Τριγωνομετρική σειρά *Fourier* μορφής B

$$\text{Θέτοντας } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{και} \quad \phi_n = -\tan^{-1}(b_n/a_n) \quad (1.47)$$

$$\text{η εξίσωση (1.45) δίνει } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (1.48)$$

1.2.3 Εκθετική σειρά *Fourier*

Παίρνοντας ως βάση τα σήματα $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega_0 t}$, με $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και $\omega_0 = 2\pi/T$,

μπορεί ν' αποδειχτεί ότι:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_0 t} \quad (1.49)$$

όπου $F_n = \frac{c_n}{\sqrt{T}}$, ενώ τα c_n δίνονται από τη σχέση:

$$c_n = (f(t), \varphi_n(t)) = \int_0^T f(t) \frac{e^{-in\omega_0 t}}{\sqrt{T}} dt \quad (1.50)$$

Επίσης, μπορεί εύκολα ν' αποδειχτεί ότι: $F_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ και $F_0 = a_0$ (1.51)

Οι τρεις προαναφερθείσες μορφές της σειράς *Fourier* συνοψίζονται στον Πίνακα 1.1 (σελίδα 53). Αξίζει να τονιστεί ότι η επέκταση σε σειρά *Fourier* ισχύει ανεξάρτητα αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική ή όχι. Η διαφορά είναι ότι, αν η σειρά ορίζεται στο διάστημα $t_2 - t_1 = T$, τότε η επέκταση ισχύει μόνο στο διάστημα T , ενώ αν η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T η επέκταση ισχύει για όλα τα t .

Επιπρόσθετα, όταν η συνάρτηση $f(t)$ είναι άρτια ή περιττή, τότε ο υπολογισμός της τριγωνομετρικής σειράς μορφής A είναι ευκολότερος. Έτσι:

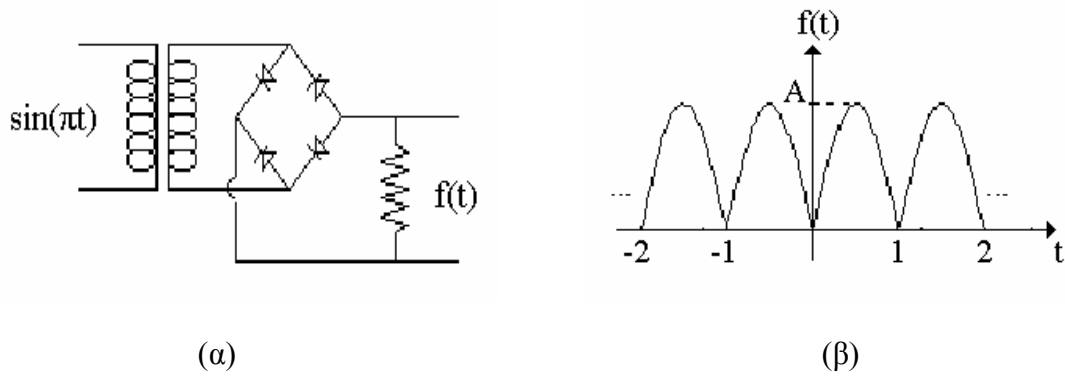
- α) Αν η $f(t)$ έχει μηδενική μέση τιμή, τότε $a_0 = \overline{f(t)} = 0$.
- β) Αν η $f(t)$ είναι άρτια, τότε $b_n = 0$ για κάθε n .
- γ) Αν η $f(t)$ είναι περιττή, τότε $a_n = 0$ για κάθε n .
- δ) Αν $f(t) = -f(t + T/2)$, τότε $a_{2n} = b_{2n} = 0$ για κάθε n .
- ε) Αν $f(t) = f(t + T/2)$, τότε $a_{2n+1} = b_{2n+1} = 0$ για κάθε n .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Όταν η είσοδος του κυκλώματος διπλής ανόρθωσης (Σχήμα 1.11α) είναι της μορφής $\sin(\pi t)$, τότε, όπως είναι γνωστό από την Ηλεκτρονική, η έξοδος $f(t)$ έχει τη μορφή του Σχήματος 1.11β, δηλαδή:

$$f(t) = \sin(\pi t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.52)$$

Ζητείται το σήμα αυτό να επεκταθεί σε σειρά *Fourier*.



Σχήμα 1.11. (α) Κύκλωμα διπλής ανόρθωσης και (β) πλήρως ανορθωμένο σήμα.

Απάντηση

Αρχικά είναι $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi$, αφού $T = 1$. Ο συντελεστής a_0 της τριγωνομετρικής μορφής A υπολογίζεται ως:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \int_0^1 A \sin(\pi t) dt = \frac{2A}{\pi} \quad (1.53\alpha)$$

$$\text{ενώ οι συντελεστές } a_n \text{ είναι } a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = 2 \int_0^1 A \sin(\pi t) \cos(2\pi n t) dt$$

$$\text{δηλαδή } a_n = -\frac{4A}{\pi(4n^2 - 1)} \text{ ενώ φυσικά } |a_n| = \frac{4A}{\pi(4n^2 - 1)} \quad (1.53\beta)$$

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση $f(t)$ είναι άρτια, οπότε οι συντελεστές b_n είναι:

$$b_n = 0 \quad (1.53\gamma)$$

Συνεπώς, η τριγωνομετρική σειρά A είναι:

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi(1-4n^2)} \cos(2\pi n t) \quad (1.53\delta)$$

Με τη βοήθεια των τύπων αλλαγής του Πίνακα 1.1, εύκολα προκύπτει ότι:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = \frac{4A}{\pi(4n^2 - 1)} \quad (1.54\alpha)$$

$$\phi_n = -\tan^{-1}(b_n/a_n) = \pi \quad (1.54\beta)$$

Επομένως, η τριγωνομετρική μορφή B δίνεται από τη σχέση:

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi(4n^2-1)} \cos(2\pi n t + \pi) \quad (1.54\gamma)$$

και είναι φυσικά ισοδύναμη με την τριγωνομετρική μορφή A.

Τέλος, όσον αφορά την εκθετική μορφή, οι συντελεστές αυτής με χρήση του Πίνακα 1.1 είναι:

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2}a_n = \frac{2A}{\pi(1-4n^2)} \quad (1.55\alpha)$$

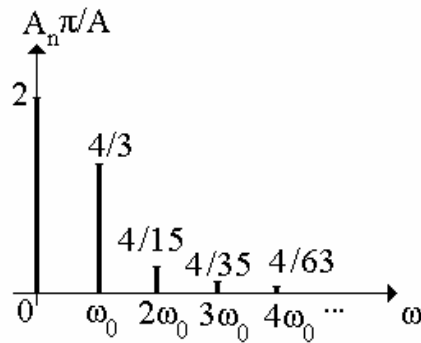
Συνεπώς, η εκθετική μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} e^{i2\pi n t} \quad (1.55\beta)$$

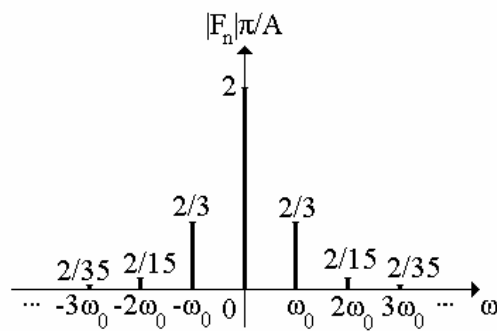
Το προαναφερθέν παράδειγμα προσφέρεται για την εισαγωγή στην έννοια των **φασμάτων**. Οι συντελεστές A_n της μορφής B αποτελούν τις φασματικές συνιστώσες πλάτους, γιατί όπως φαίνεται από την εξίσωση (1.54α), τα A_n αποτελούν τα πλάτη των φασματικών συνιστωσών. Αναφερόμενοι στο προηγούμενο παράδειγμα, το Σχήμα 1.12 αποτελεί το **φάσμα πλάτους μονής πλευράς** του σήματος $f(t)$, όπου έχουν σχεδιαστεί οι συντελεστές A_n (πολλαπλασιασμένοι επί τον παράγοντα π/A) σε συνάρτηση με τη κυκλική συχνότητα ω . Οι γραμμές του σχήματος, που φανερώνουν την **ένταση** κάθε φασματικής συνιστώσας, απέχουν μεταξύ τους κατά ω_0 (**θεμελιώδης συχνότητα**). Το άπειρο πλήθος των συχνοτήτων, οι οποίες εμφανίζονται, δίνουν μια αίσθηση του **αρμονικού περιεχομένου** του σήματος, αλλά η συνεισφορά των ανωτέρων αρμονικών $n\omega_0$, με $n > 4$, είναι φανερό ότι μπορεί με βάση κάποιο "κριτήριο" να θεωρηθεί αμελητέα. Το κριτήριο αυτό είναι κατά πόσο οι συχνότητες αυτές συνεισφέρουν στη μέση ισχύ του σήματος, όπως αυτό προκύπτει από το θεώρημα του Parseval, το οποίο θα παρουσιαστεί παρακάτω.

Στην περίπτωση, που το σήμα $f(t)$ δίνεται από την εκθετική σειρά *Fourier*, το φάσμα πλάτους πρέπει να δίνεται από τους συντελεστές F_n . Επειδή, όμως, οι συντελεστές $F_n = 0.5(a_n - ib_n)$ και $F_{-n} = 0.5(a_n + ib_n)$ είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί, στο φάσμα πλάτους η εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι το μέτρο $|F_n|$. Λαμβάνοντας υπόψη [εξίσωση (1.55β)] ότι το άθροισμα είναι τώρα από $n = -\infty$ έως $n = +\infty$ καθώς και ότι $|F_n| = |F_{-n}|$, το φάσμα στην περίπτωση αυτή θα εκτείνεται και για αρνητικά ω

έχοντας **άρτια συμμετρία**. Το φάσμα αυτό, $|F_n| = |F_n(\omega)|$, ονομάζεται **φάσμα πλάτους διπλής πλευράς** και για το προηγούμενο παράδειγμα έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.13.

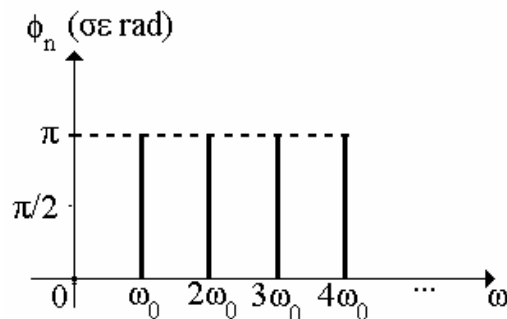


Σχήμα 1.12. Φάσμα πλάτους μονής πλευράς του σήματος $f(t)$.



Σχήμα 1.13. Φάσμα πλάτους διπλής πλευράς του σήματος $f(t)$.

Στην περίπτωση, που το σήμα $f(t)$ είναι αναπτυγμένο σε τριγωνομετρική σειρά μορφής B, το σχεδιάγραμμα $\phi_n = \phi_n(\omega)$ λέγεται **φάσμα φάσης** του $f(t)$. Στο Σχήμα 1.14 δίνεται το φάσμα φάσης του σήματος $f(t)$ του προηγούμενου παραδείγματος.

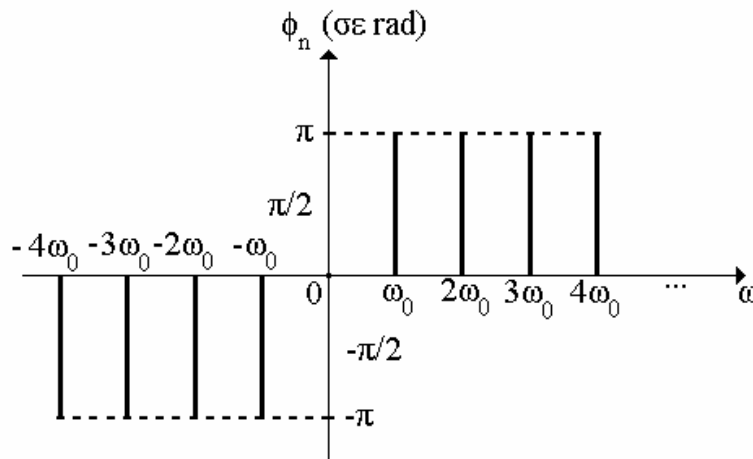


Σχήμα 1.14. Φάσμα φάσης του σήματος $f(t)$ (τριγωνομετρικής μορφής B).

Όταν το σήμα $f(t)$ εκφράζεται από την εκθετική σειρά *Fourier*, τότε:

$$F_n = 0.5(a_n - ib_n) = 0.5\sqrt{a_n^2 + b_n^2} e^{i\phi_n} \text{ με } \phi_n = -\tan^{-1}(b_n/a_n)$$

Για τους λόγους, που προαναφέρθηκαν για τα φάσματα πλάτους διπλής πλευράς, το άθροισμα είναι από $n = -\infty$ έως $n = +\infty$, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\phi_n = -\phi_{-n}$ (δηλαδή το φάσμα έχει **περιττή συμμετρία**), είναι φανερό ότι το φάσμα φάσης του σήματος $f(t)$ του προηγούμενου παραδείγματος θα έχει τη μορφή του Σχήματος 1.15.



Σχήμα 1.15. Φάσμα φάσης του σήματος $f(t)$ (εκθετικής μορφής).

Ένα άλλο είδος φάσματος, το οποίο είναι πολύ χρήσιμο, είναι το λεγόμενο **φάσμα ισχύος** $|F_n|^2 = |F_n(\omega)|^2$, δηλαδή το σχεδιάγραμμα των συντελεστών $|F_n(\omega)|^2$ σε συνάρτηση με τη συχνότητα ω . Η σπουδαιότητα του φάσματος ισχύος έγκειται στο γεγονός ότι, μέσω του φάσματος αυτού, είναι δυνατός ο υπολογισμός της μέσης ισχύος ενός περιοδικού σήματος (ή της μέσης ισχύος ενός μη περιοδικού σήματος, που έχει επεκταθεί σε σειρά *Fourier* στο διάστημα $[0, T]$) με τη βοήθεια του **θεωρήματος του Parseval**, το οποίο διατυπώνεται μέσω της επόμενης εξίσωσης:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \quad (1.56)$$

Η αξία του θεωρήματος αυτού είναι ότι πέρα από ένα εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της μέσης ισχύος οδηγεί στον υπολογισμό της συνεισφοράς των διαφόρων αρμονικών στη μέση ισχύ. Έτσι, για παράδειγμα, αν έχει υπολογιστεί η μέση ισχύς με τη βοήθεια

της εξίσωσης (1.56), τότε η συνεισφορά της n -οστής αρμονικής είναι $P_n = |F_n|^2 + |F_{-n}|^2 = 2|F_n|^2$ ($n \neq 0$) ή σαν ποσοστό:

$$\text{Ισχύς \% της } n\text{-οστής αρμονικής} = \frac{P_n}{P} \times 100 = \frac{2|F_n|^2}{P} \times 100 \quad (1.57)$$

Για να δοθεί ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, έστω το σήμα $f(t)$, που δίνεται από την εξίσωση (1.52). Το ερώτημα, που τίθεται, είναι πόση ισχύς υπάρχει στη συνεχή (DC) συνιστώσα. Είναι φανερό ότι για $n = 0$ ισχύει $|F_0|^2 = 4A^2/\pi^2$, ενώ η ισχύς, η οποία υπάρχει στη θεμελιώδη συχνότητα ω_0 , ισούται με $P_1 = |F_1|^2 + |F_{-1}|^2 = 2|F_1|^2 = 8A^2/9\pi^2$. Από την άλλη μεριά η μέση ισχύς στο διάστημα $[0, 1]$ είναι:

$$\bar{P} = \int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 A^2 \sin^2(\pi t) dt = A^2/2 \quad (1.58)$$

Έτσι, το ποσοστό της ισχύος για παράδειγμα της DC συνιστώσας είναι:

$$\frac{P_0}{P} \times 100 = \frac{|F_0|^2}{P} \times 100 = \frac{4A^2/\pi^2}{A^2/2} \cong 80\% \quad (1.59)$$

δηλαδή το 80% της μέσης ισχύος περιέχεται στη συνεχή συνιστώσα. Είναι λοιπόν φυσικό το σήμα αυτό να χαρακτηριστεί ως σήμα "φτωχού αρμονικού περιεχομένου" ή σήμα χαμηλής συχνότητας, με την έννοια ότι μόνο οι χαμηλές συχνότητες έχουν σημαντική συνεισφορά στη μέση ισχύ του σήματος.

2. Να βρεθεί το φάσμα πλάτους διπλής πλευράς του σήματος:

$$f(t) = \begin{cases} Ee^{-at} & , 2nT_1 < t < (2n+1)T_1 \\ -Ee^{-a(t-T_1)} & , (2n+1)T_1 < t < (2n+2)T_1 \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots, T_1 \approx 5a$$

Απάντηση

Η περίοδος του σήματος είναι $T = 2T_1$. Άρα:

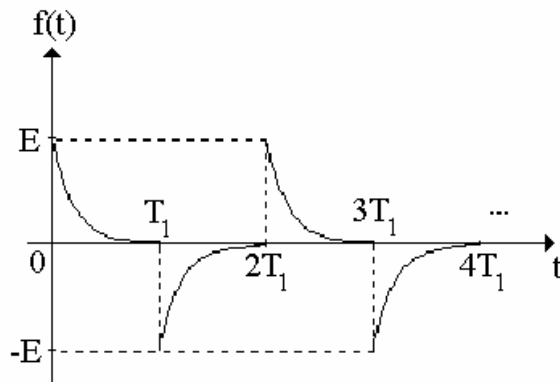
$$F_n = \frac{1}{2T_1} \int_0^{2T_1} f(t) e^{-in\pi/T_1} dt = \frac{E}{2T_1} \int_0^{T_1} e^{-at} e^{-in\pi/T_1} dt - \frac{E}{2T_1} \int_{T_1}^{2T_1} e^{-a(t-T_1)} e^{-in\pi/T_1} dt$$

$$= \frac{E(1 - e^{-(aT_1 + in\pi)})}{2aT_1 + i2n\pi} - \frac{E(e^{-in\pi} - e^{-aT_1})}{2aT_1 + i2n\pi} = \frac{E(1 - e^{-in\pi})}{2aT_1 + i2n\pi} (1 - e^{-aT_1 - in\pi})$$

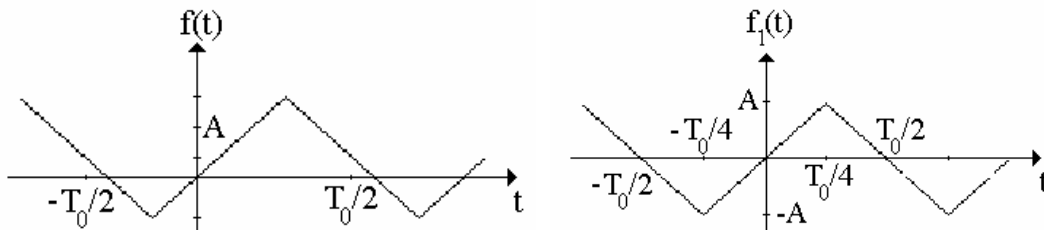
$$= \begin{cases} 0 & , n \text{ αρτιο} \\ \frac{E(1 + e^{-aT_1})}{aT_1 + in\pi} & , n \text{ περιττο} \approx \frac{E}{aT_1 + in\pi} \end{cases} \text{, αφού } T_1 \approx 5a \text{ είναι } \exp(-aT_1) \approx 0.$$

Άρα, $|F_n| = \frac{E}{\sqrt{(aT_1)^2 + (n\pi)^2}} = \frac{E}{\sqrt{(aT_1)^2 + (\omega_n T_1)^2}}$ για n περιττό, αφού $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/T_1$

και $\omega_n = 2\pi n/T = n\pi/T_1$.



3. Να προσδιοριστούν οι συντελεστές *Fourier* για το περιοδικό σήμα $f(t)$ του παρακάτω σχήματος.



Απάντηση

Είναι φανερό ότι αν ένα σήμα $x(t)$ έχει μέση τιμή α_0 , τότε οι συντελεστές *Fourier* α_n και b_n της συνάρτησης $x(t) - \alpha_0$ θα είναι οι ίδιοι με εκείνους της συνάρτησης $x(t)$, δηλαδή τα δύο αναπτύγματα θα διαφέρουν μόνο κατά τη συνεχή (*DC*) συνιστώσα. Συνεπώς, αντί να υπολογιστούν οι συντελεστές *Fourier* του $f(t)$, θα υπολογιστούν εκείνοι του

σήματος $f_1(t) = f(t) - A/2$. Είναι φανερό ότι το σήμα $f_1(t)$ έχει περιττή συμμετρία και μάλιστα συμμετρία μισού κύματος [$f_1(t) = -f_1(t + T_0/2)$]. Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις έπεται ότι θα υπάρχουν μόνο ημιτονικοί όροι στο ανάπτυγμα, και, μάλιστα, θα εμφανίζονται μόνο οι περιττές αρμονικές σ' αυτό. Άρα,

$$\alpha_n = 0 \text{ και } b_n = \frac{8}{T_0} \int_0^{T_0/4} \left(\frac{4A}{T_0}t\right) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt = \frac{8A}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 3, \dots$$

4. Να βρεθεί η ανάπτυξη *Fourier* του τράινου ώσεων (Σχήμα 1.6β)

$$f(t) = I \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \delta(t - \kappa T_0)$$

Απάντηση

Είναι γνωστό ότι: $a_0 = \frac{I}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) dt = \frac{I}{T_0}$ και $a_n = \frac{2I}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt = \frac{2I}{T_0}$, ενώ

$b_n = \frac{2I}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt = 0$ λόγω της άρτιας συμμετρίας του $f(t)$. Επιπρόσθετα

$$F_n = \frac{I}{T_0} \text{ και } \phi_n = 0, \text{ επομένως } f(t) = \frac{I}{T_0} + \frac{2I}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) = \frac{I}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{2\pi nt}{T_0}}$$

5. Να βρεθεί το φάσμα ισχύος του τράινου παλμών (Σχήμα 1.7β), το οποίο σε μια περίοδο T δίνεται από τη σχέση $f(t) = A$, για $|t| < \alpha/2$ ($\alpha < T$).

Απάντηση

Οι συντελεστές F_n του σήματος $f(t)$ είναι:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} A e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{2A}{n\omega_0 T} \left[\frac{1}{2i} (e^{in\omega_0 \alpha/2} - e^{-in\omega_0 \alpha/2}) \right]$$

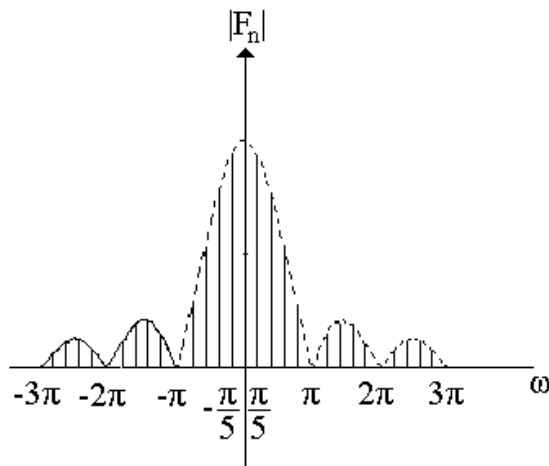
$$= \frac{2A}{n\omega_0 T} \sin\left(\frac{n\omega_0 \alpha}{2}\right) = \frac{\alpha A}{T} \left[\frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 \alpha}{2}\right)}{\frac{n\omega_0 \alpha}{2}} \right] = \frac{\alpha A}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 \alpha}{2}\right)$$

δηλαδή οι συντελεστές F_n είναι ουσιαστικά μια συνάρτηση δειγματοληψίας με τη διαφορά ότι οι συντελεστές αυτοί λαμβάνουν διακριτές τιμές.

Επιλέγοντας $\alpha = 0.05$ (sec), $T = 0.25$ (sec) και $A = 1$, το φάσμα πλάτους διπλής πλευράς $|F_n| = |F_n(\omega)|$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου $\omega_0 = 8\pi$ και επομένως

$$F_n = \frac{\alpha A}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 \alpha}{2}\right) = \frac{1}{5} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{5}\right), \text{ ενώ το φάσμα ισχύος είναι } |F_n|^2 = \frac{1}{25} [\text{Sa}\left(\frac{n\pi}{5}\right)]^2,$$

που σχεδιάζεται εύκολα με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος.



Αξίζει να σημειωθεί ότι αν τεθεί $\alpha = 1/20$, $A = 1$ (όπως πριν), αλλά $T = 0.5$, δηλαδή διατηρηθεί ίδιο το πλάτος και η διάρκεια του παλμού, αλλά διπλασιαστεί η περίοδος, η "πυκνότητα" των φασματικών γραμμών θα διπλασιαστεί. Όταν το $T \rightarrow +\infty$, δηλαδή λαμβάνεται υπόψη μόνο ένας παλμός, τότε το φάσμα γίνεται συνεχές. Στην περίπτωση αυτή, όπως θα αποδειχτεί στο επόμενο κεφάλαιο, ο μετασχηματισμός *Fourier* του σήματος παλμού είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας.

1.3 Μετασχηματισμός *Fourier* και Φάσματα μη Περιοδικών Σημάτων

Τα φάσματα πλάτους, φάσης και ισχύος, που ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα για περιοδικά σήματα, είναι πολύ σημαντικά, αφού παρέχουν την δυνατότητα της

παρακολούθησης ενός πληροφοριακού σήματος στο πεδίο της συχνότητας καθώς αυτό διέρχεται από διάφορα συστήματα. Βασικός στόχος της ενότητας αυτής είναι η επέκταση των εννοιών των φασμάτων και για μη περιοδικά σήματα, η οποία γίνεται με τη βοήθεια του **Μετασχηματισμού ή Ολοκληρώματος Fourier**. Το "πέρασμα" από τη σειρά στο ολοκλήρωμα *Fourier* μπορεί να γίνει εύκολα (όπως θ' αποδειχτεί αμέσως μετά) για τα **σήματα ενέργειας**, δηλαδή για σήματα $f(t)$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (1.60)$$

Υπενθυμίζεται ότι τέτοια σήματα είναι εκείνα, που είτε μηδενίζονται έξω από ένα πεπερασμένο διάστημα (π.χ. ο τετραγωνικός παλμός), είτε είναι όσο μικρά (κατ' απόλυτη τιμή) απαιτείται έξω από ένα πεπερασμένο διάστημα (π.χ. παλμός *Gauss*).

Έστω, λοιπόν, ένα τέτοιο σήμα, το οποίο ορίζεται στο διάστημα $[-T/2, T/2]$ και θεωρείται μηδενικό ή αμελητέο έξω απ' αυτό. Το σήμα αυτό, μπορεί να επεκταθεί σε σειρά *Fourier* περιόδου $T = 2\pi/\omega$. Η επέκταση, φυσικά, ισούται ακριβώς με το σήμα, μόνο μέσα στο διάστημα που θεωρήθηκε (εφόσον η $f(t)$ δεν είναι περιοδική). Έτσι, προκύπτει η εξίσωση:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_0 t} \quad \text{για } -T/2 \leq t \leq T/2 \quad (1.61)$$

$$\text{όπου } F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (1.62)$$

Η θεμελιώδης συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/T$ είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών αρμονικών του φάσματος πλάτους, το οποίο αποτελείται από διακριτές φασματικές γραμμές. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.62) στην (1.61) η τελευταία γράφεται:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t} \left[\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] \quad (1.63)$$

Έστω ότι $T \rightarrow +\infty$, τότε το $\omega_0 = 2\pi/T$ θα τείνει στο $d\omega$. Αυτό σημαίνει ότι η απόσταση μεταξύ των αρμονικών γίνεται απειροστά μικρή ($d\omega$) και ο αριθμός των αρμονικών συνιστωσών τείνει στο άπειρο ($n \rightarrow +\infty$). Παράλληλα, η συχνότητα $n\omega_0$ της n -οστής αρμονικής θα παίρνει στο όριο συνεχείς τιμές, οπότε θα συμβολίζεται με ω . Σύμφωνα

με τα παραπάνω, στο όριο το άθροισμα της εξίσωσης (1.63) θα γίνεται ολοκλήρωμα, δηλαδή:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] \quad \text{ή} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] d\omega \quad (1.64)$$

Η εξίσωση (1.64) είναι το **ολοκλήρωμα Fourier** και το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι μια μιγαδική συνάρτηση του ω , η οποία ονομάζεται **Μετασχηματισμός Fourier** της $f(t)$ και συμβολίζεται με $F(\omega)$. Συνεπώς:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{και} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.65)$$

Σημειώνεται ότι στο ζεύγος μετασχηματισμών των εξισώσεων (1.65) συνηθίζεται και ο συμβολισμός $F(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)]$ και $f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(\omega)]$.

Η απόδειξη, η οποία δόθηκε για το Μ/Σ *Fourier*, μπορεί να μην είναι αυστηρή από μαθηματικής πλευράς, ισχύει όμως όταν ικανοποιείται ο περιορισμός της εξίσωσης (1.60). Πράγματι, η συνθήκη αυτή αναγκάζει την εξίσωση (1.65α) να συγκλίνει, έτσι ώστε να υπάρχει το $F(\omega)$ και στη συνέχεια το $f(t)$ να δίνεται από την (1.65β). Επιπλέον, σημειώνεται ότι το σήμα $f(t)$ πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες *Dirichlet*, οι οποίες δόθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο. Οι περιορισμοί αυτοί είναι ικανοί, αλλά όχι αναγκαίοι, για την ύπαρξη του ζεύγους των εξισώσεων (1.65).

Το σημαντικό όμως είναι ότι εφόσον υπάρχει ο Μ/Σ *Fourier*, τότε αυτός είναι ένας και μοναδικός και αντίστροφα. Τέλος, να σημειωθεί ότι για σήματα ισχύος **δεν** μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (1.65) για τον υπολογισμό του Μ/Σ *Fourier*. Το θέμα αυτό θ' αναλυθεί εκτενέστερα στη συνέχεια.

Πριν αναλυθούν οι ιδιότητες του Μ/Σ *Fourier*, κρίνεται σκόπιμο ν' αναφερθούν τα φάσματα. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι αυτός είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση του ω τότε ισχύει:

$$F(\omega) = |F(\omega)| \exp[i\theta(\omega)] \quad (1.66)$$

Σε πλήρη αντιστοιχία με τα όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, η συνάρτηση $|F(\omega)|$ δίνει το **φάσμα πλάτους** και η συνάρτηση $\theta(\omega)$ το **φάσμα φάσης** του σήματος $f(t)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να βρεθούν τα φάσματα πλάτους και φάσης του σήματος $f(t) = \exp(-3t)u(t)$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του Μ/Σ *Fourier* ισχύει:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3t} u(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{3 + i\omega}$$

Συνεπώς, είναι φανερό ότι τα δύο φάσματα θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\text{Φάσμα πλάτους: } |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9 + \omega^2}} \text{ και φάσμα φάσης: } \theta(\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{3}\right)$$

1.4 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού *Fourier*

1.4.1 Γραμμική ιδιότητα

Αν οι Μ/Σ *Fourier* των συναρτήσεων $f(t)$ και $g(t)$ είναι $F(\omega)$ και $G(\omega)$, αντίστοιχα, τότε:

$$af(t) + bg(t) \leftrightarrow aF(\omega) + bG(\omega) \quad (1.67)$$

1.4.2 Συμμετρική ιδιότητα

Αν ο Μ/Σ *Fourier* του $f(t)$ είναι $F(\omega)$, τότε για το σήμα $F(t)$ είναι:

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (1.68)$$

1.4.3 Μετατόπιση στο χρόνο

Αν $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, τότε για το μετατοπισμένο κατά t_0 σήμα θα ισχύει:

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) \exp(-i\omega t_0) \quad (1.69)$$

Φυσικά, το φάσμα πλάτους του σήματος $f(t - t_0)$ παραμένει το ίδιο, γιατί $|\Im[f(t - t_0)]| = |F(\omega) \exp(-i\omega t_0)| = |F(\omega)|$. Αυτό σημαίνει ότι μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου συνεπάγεται αλλαγή μόνο του φάσματος φάσης του σήματος.

1.4.4 Μετατόπιση στη συχνότητα

Αν $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, τότε πολλαπλασιασμός του σήματος $f(t)$ με κάποιο σήμα συχνότητας ω_0 συνεπάγεται μετατόπιση των φασμάτων κατά την ίδια συχνότητα ω_0 , δηλαδή:

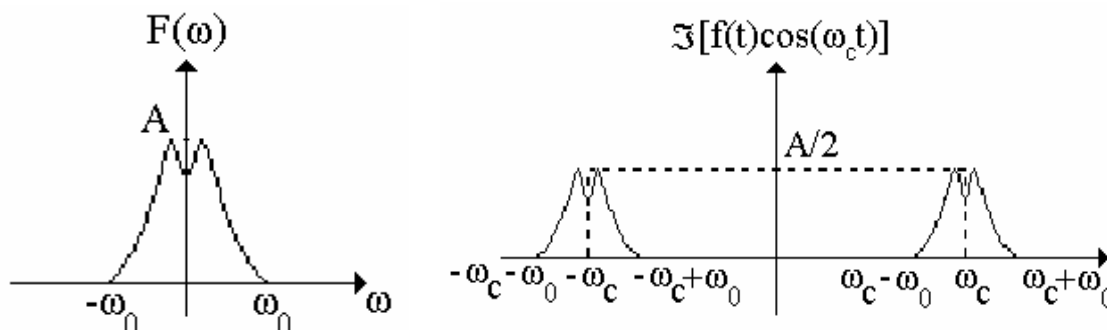
$$f(t)\exp(-i\omega_0 t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \quad (1.70\alpha)$$

Σημειώνεται ότι, επειδή $\cos(\omega_0 t) = (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})/2$ και $\sin(\omega_0 t) = (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})/(2i)$, η ιδιότητα (1.70α) μπορεί να γραφεί και ως:

$$f(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]/2 \quad (1.70\beta)$$

$$\text{ή } f(t)\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]/2i \quad (1.70\gamma)$$

Η ιδιότητα αυτή έχει μεγάλη εφαρμογή στα συστήματα τηλεπικοινωνιών και ιδιαίτερα στη διαμόρφωση, γιατί δείχνει τον τρόπο με τον οποίο το φάσμα ενός σήματος μπορεί να μετατοπιστεί στο πεδίο συχνοτήτων. Έτσι, για παράδειγμα, αν ο Μ/Σ *Fourier* ενός σήματος $f(t)$ δίνεται στο Σχήμα 1.16α, τότε ο Μ/Σ *Fourier* του διαμορφωμένου κατά *AM* σήματος, δηλαδή του σήματος $f(t)\cos(\omega_c t)$, δίνεται στο Σχήμα 1.16β.



Σχήμα 1.16. Μετασχηματισμός *Fourier* των (α) $f(t)$ και (β) $f(t)\cos(\omega_c t)$.

1.4.5 Ιδιότητα κλιμάκωσης

Η αλλαγή της κλίμακας του χρόνου επηρεάζει αντιστρόφως ανάλογα την έκταση του Μ/Σ *Fourier*. Έτσι, αν $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, τότε: $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ (1.71)

Η ιδιότητα αυτή δείχνει ότι μπορεί κανείς να στενεύει ή να πλατύνει τα φάσματα ενός σήματος με πλάτυνση ή στένεμα του χρόνου, κάνοντας χρήση βέβαια της κατάλληλης κλίμακας. Το γεγονός ότι το πλάτος του $f(t)$ είναι αντιστρόφως ανάλογο του πλάτους του $F(\omega)$ μπορεί να οδηγήσει σε συμπεράσματα ανάλογα με τη γνωστή αρχή της αβεβαιότητας στην Κβαντομηχανική. Περισσότερες λεπτομέρειες για το θέμα αυτό μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο Παράδειγμα 8.

1.4.6 Ιδιότητα αντιστροφής

Αν στην εξίσωση (1.71) τεθεί $\alpha = -1$, τότε έπεται ότι όταν $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, τότε:

$$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega) \quad (1.72)$$

1.4.7 Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου

Προτού αναφερθεί η ιδιότητα αυτή, κρίνεται απαραίτητο να δοθεί ο ορισμός της **συνέλιξης** (*convolution*) δύο συναρτήσεων. Η **συνέλιξη** δύο συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$, η οποία συμβολίζεται με $f_1(t)*f_2(t)$, ορίζεται ως:

$$f_1(t)*f_2(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \quad (1.73)$$

Η πράξη της συνέλιξης είναι πολύ σημαντική γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή των σχέσεων εισόδου – εξόδου σε γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα (σταθερά) συστήματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνέλιξη έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- α) Αντιμεταθετική : $f_1(t)*f_2(t) = f_2(t)*f_1(t)$
- β) Προσεταιριστική : $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t) = f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$
- γ) Επιμεριστική : $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)] = [f_1(t)*f_2(t)]+[f_1(t)*f_3(t)]$
- δ) Συνέλιξη με $\delta(t)$: $f(t)*\delta(t) = f(t)$

Ένα πρακτικό παράδειγμα για τον τρόπο, με τον οποίο χρησιμοποιεί κανείς τον ορισμό (1.73), για να υπολογίσει τη συνέλιξη δύο σημάτων αποτελεί το Παράδειγμα 9.

Επιστρέφοντας στις ιδιότητες του Μ/Σ *Fourier* δίνεται η παρακάτω ιδιότητα:

$$f_1(t)*f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega) \quad (1.74)$$

η οποία δηλώνει ότι η πράξη της συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου είναι ισοδύναμη με την πράξη του πολλαπλασιασμού στο χώρο της συχνότητας. Μάλιστα, αν εξαιρέσει κανείς ένα σταθερό πολλαπλασιαστικό παράγοντα, η επόμενη ιδιότητα δείχνει ότι ισχύει και το αντίστροφο.

1.4.8 Συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας

$$\text{Αν } f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \text{ και } f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega), \text{ τότε } 2\pi f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)*F_2(\omega) \quad (1.75)$$

Όπως έχει προαναφερθεί, η συνθήκη (1.60) είναι μόνο ικανή και όχι αναγκαία για την ύπαρξη του Μ/Σ *Fourier*. Έτσι, τα σήματα ισχύος, για τα οποία δεν ισχύει η (1.60),

αλλά η μέση ισχύς τους είναι πεπερασμένη, δηλαδή $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt < \infty$, έχουν και

αυτά Μ/Σ *Fourier*, ο οποίος υπολογίζεται με τη Θεωρία των Κατανομών. Στη συνέχεια, δίνονται (χωρίς απόδειξη) οι Μ/Σ *Fourier* ορισμένων σημάτων ισχύος, οι οποίοι θα είναι χρήσιμοι στις επόμενες παραγράφους.

i) Για τη σταθερή συνάρτηση: $f(t) = A \leftrightarrow F(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$.

Φυσικά, λόγω της (1.70α), ισχύει: $Ae^{i\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega - \omega_0)$.

ii) Για τη συνάρτηση $\delta(t)$: $\delta(t) \leftrightarrow 1$ και γενικά $A\delta(t - t_0) \leftrightarrow Ae^{-i\omega t_0}$.

iii) Για την περιοδική συνάρτηση $f(t)$: $F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$, όπου

$F_T(n\omega_0)$ είναι ο Μ/Σ *Fourier* μιας περιόδου T της $f(t)$.

Έτσι, για παράδειγμα, ο Μ/Σ *Fourier* του τράινου ώσεων είναι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (1.76)$$

δηλαδή το τράινο ώσεων στο πεδίο του χρόνου μετασχηματίζεται σε τράινο ώσεων στο πεδίο της συχνότητας.

Τελειώνοντας την ανάλυση των Μ/Σ *Fourier* δίνονται οι ιδιότητες καθώς και οι μετασχηματισμοί των πιο συνηθισμένων σημάτων (ενέργειας και ισχύος) στους Πίνακες 1.2 και 1.3 (σελίδες 54 και 55). Στην επόμενη παράγραφο, και σε αντιστοιχία με τα όσα προηγήθηκαν για τα περιοδικά σήματα, θα εισαχθούν οι έννοιες της φασματικής πυκνότητας ενέργειας και ισχύος και θα δοθούν οι αντίστοιχες εκδοχές του Θεωρήματος του *Parseval* για τα μη περιοδικά σήματα.

1.5 Φασματικές Πυκνότητες Ενέργειας και Ισχύος

Λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα *Parseval* για τα περιοδικά σήματα, όπως αυτό διατυπώθηκε στην εξίσωση (1.56), μπορεί να βρεθεί ότι η **ενέργεια** E ενός **σήματος ενέργειας** $f(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (1.77)$$

όπου ο όρος $S(\omega) = |F(\omega)|^2$ ονομάζεται **φασματική πυκνότητα ενέργειας**. Φυσικά, η $S(\omega)$ είναι άρτια συνάρτηση, οπότε ο υπολογισμός της ενέργειας $E_{(\omega_1, \omega_2)}$ στο διάστημα $[\omega_1, \omega_2]$ μπορεί να γίνει ως εξής:

$$E_{(\omega_1, \omega_2)} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} S(\omega) d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega) d\omega \right] = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega) d\omega \quad (1.78)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να βρεθεί η ενέργεια του σήματος $f(t) = \exp(-t)u(t)$ στη ζώνη αρμονικών από $\omega = 0$ (DC) ως $\omega = 20\pi$ καθώς και το ποσοστό της ενέργειας στη ζώνη αυτή.

Απάντηση

Είναι εύκολο να βρεθεί ότι $F(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$, οπότε το $S(\omega)$ είναι $S(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$. Συνεπώς,

η ζητούμενη ενέργεια είναι:

$$E_{(0, 2\pi \cdot 10)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi \cdot 10} \frac{d\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \omega \Big|_0^{62.8} = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} 62.8 \cong \frac{1}{2.1}$$

Από την άλλη μεριά, η ενέργεια E του σήματος είναι:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-t}u(t)]^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$$

Επομένως, το ζητούμενο ποσοστό είναι $\%E_{(0, 2\pi \cdot 10)} = \frac{2}{2.1} \times 100 \cong 95\%$, δηλαδή το σήμα αυτό είναι "χαμηλού αρμονικού περιεχομένου" με την έννοια που δόθηκε στον όρο αυτό στην προηγούμενη ενότητα.

Για τα **σήματα ισχύος** η εκδοχή του θεωρήματος *Parseval* αναφέρεται στην ισχύ και όχι στην ενέργεια, η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση απειρίζεται, και δίνεται από τη σχέση:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 \right] d\omega \quad (1.79)$$

όπου $F_T(\omega)$ είναι ο Μ/Σ *Fourier* του σήματος $f_T(t)$, το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & , |t| \leq T/2 \\ 0 & , |t| > T/2 \end{cases}$$

Στην περίπτωση, κατά την οποία το $f(t)$ είναι περιοδικό, ο $F_T(\omega)$ είναι ο Μ/Σ *Fourier* μιας περιόδου T του $f(t)$ και η συνάρτηση

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 \quad (1.80)$$

ορίζεται ως **φασματική πυκνότητα ισχύος** και μπορεί να βοηθήσει σε υπολογισμούς ανάλογους με εκείνους των σημάτων ενέργειας. Στην πράξη, όμως, τα πράγματα δεν είναι και τόσο απλά, γιατί η εξίσωση (1.80) δημιουργεί προβλήματα. Έτσι, αν το σήμα είναι περιοδικό, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση (1.56), η οποία σχετίζει την ισχύ με τους συντελεστές *Fourier* $|F_n|^2$. Αντίθετα, αν το σήμα **δεν** είναι περιοδικό, τότε μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει το θεώρημα *Wiener-Khinchine*, το οποίο δίνεται στη Θεωρία Συσχέτισης.

Η ενότητα αυτή θα ολοκληρωθεί με την παράθεση ορισμένων βασικών αρχών για την απόκριση γραμμικών και χρονικά σταθερών συστημάτων καθώς και με την εισαγωγή της έννοιας των φίλτρων.

1.6 Απόκριση Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων – Φίλτρα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στη παράγραφο 1.1, μια βασική ιδιότητα των γραμμικών και χρονικά σταθερών συστημάτων είναι η δυνατότητά τους να περιγραφούν με τη βοήθεια μιας μιγαδικής συνάρτησης $H(\omega)$, που ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς**. Πράγματι, αν $x(t)$ είναι η είσοδος ενός τέτοιου συστήματος και $h(t)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς εκφρασμένη στο πεδίο του χρόνου, δηλαδή $H(\omega) = \mathfrak{F}[h(t)]$, τότε η έξοδος του συστήματος $y(t)$ είναι:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (1.81)$$

δηλαδή η έξοδος του συστήματος είναι η συνέλιξη της εισόδου με τη συνάρτηση μεταφοράς. Είναι φανερό ότι, λόγω της (1.75), η εξίσωση (1.81) μπορεί να γραφεί στο πεδίο της συχνότητας ως εξής:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (1.82)$$

όπου $Y(\omega) = \mathfrak{F}[y(t)]$ και $X(\omega) = \mathfrak{F}[x(t)]$. Σημειώνεται ότι η εξίσωση (1.82) δίνει:

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| \cdot |X(\omega)| \Rightarrow S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) \quad (1.83\alpha)$$

$$\angle Y(\omega) = \angle H(\omega) + \angle X(\omega) \quad (1.83\beta)$$

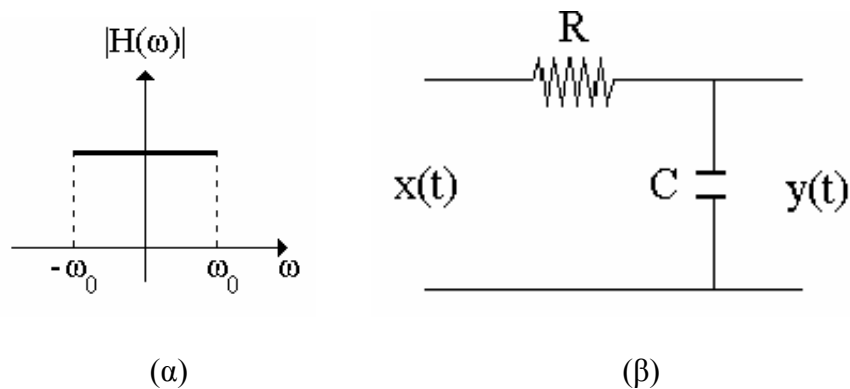
με $S_Y(\omega)$ και $S_X(\omega)$ είναι οι φασματικές πυκνότητες (ενέργειας και ισχύος) των $x(t)$ και $y(t)$, αντίστοιχα, ενώ το σύμβολο $\angle f$ αναπαριστά τη γωνία της συνάρτησης f .

Η φυσική σημασία της $H(\omega)$ είναι η εξής: Έστω ότι η είσοδος του συστήματος είναι η συνάρτηση δέλτα, δηλαδή $x(t) = \delta(t)$. Τότε η έξοδος του είναι $y(t) = h(t) * x(t) = h(t) * \delta(t) = h(t)$, όπου η τελευταία ισότητα δείχνει ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος είναι ο M/Σ *Fourier* της απόκρισής του σε κρουστική διέγερση. Έστω, λοιπόν, ένα σύστημα για το οποίο $h(t) = \delta(t)$, τότε η έξοδος του είναι $y(t) = h(t) * x(t) = x(t)$, δηλαδή η έξοδος του είναι πιστό αντίγραφο της εισόδου. Ένα τέτοιο σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega) = 1$ για κάθε ω , δηλαδή ουσιαστικά το σύστημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα **ιδανικό φίλτρο** με την έννοια ότι επιτρέπει τη διέλευση οποιασδήποτε συχνότητας μέσα σ' αυτό. Φυσικά τέτοιο σύστημα δεν υπάρχει στην πράξη και δεν μπορεί να υλοποιηθεί ούτε κατά προσέγγιση. Για να διευκολυνθούν

λοιπόν τα πράγματα, μπορεί κανείς να "σπάσει" αυτό το ιδανικό φίλτρο σε τρία άλλα "ιδανικά" φίλτρα, που μπορούν να προσεγγιστούν στην πράξη.

1.6.1 Χαμηλοπερατό φίλτρο (*Low-Pass Filter, LPF*)

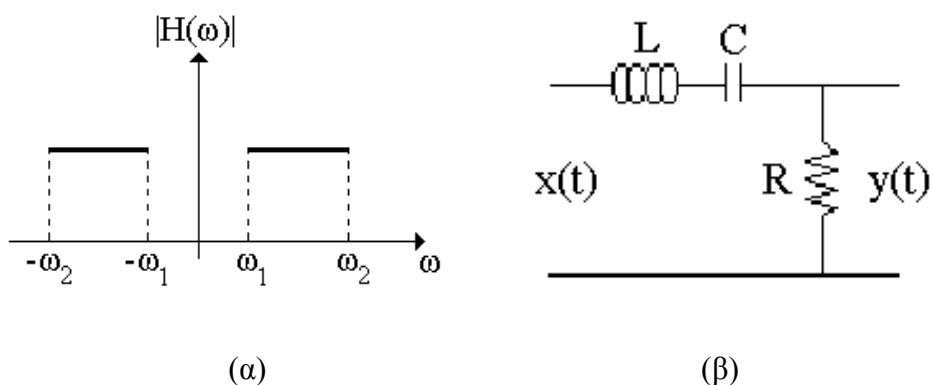
Το φίλτρο αυτό επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μηδέν μέχρι κάποια συχνότητα ω_0 . Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς του $H(\omega)$ καθώς κι ένα σύστημα, το οποίο το προσεγγίζει στην πράξη, δίνονται στο Σχήμα 1.17.



Σχήμα 1.17. (α) Το χαμηλοπερατό φίλτρο και (β) η προσομοίωσή του με κύκλωμα RC.

1.6.2 Ζωνοπερατό φίλτρο (*Band-Pass Filter, BPF*)

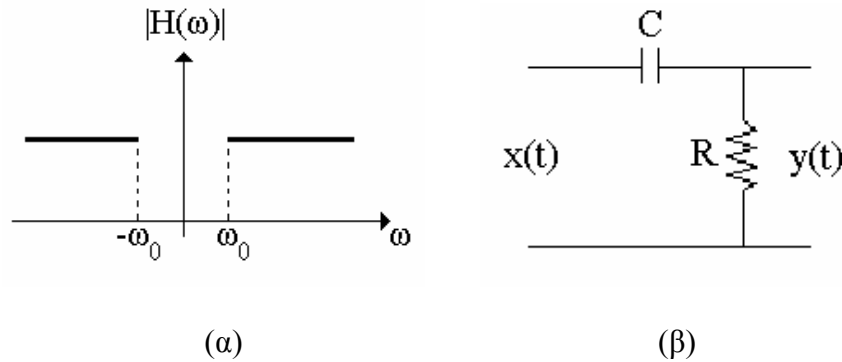
Το φίλτρο αυτό επιτρέπει τη διέλευση μιας ζώνης συχνοτήτων από ω_1 ως ω_2 . Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς του $H(\omega)$ καθώς και ένα κύκλωμα, που το προσομοιώνει στην πράξη, δίνονται στο Σχήμα 1.18.



Σχήμα 1.18. (α) Το ζωνοπερατό φίλτρο και (β) η προσομοίωσή του με κύκλωμα RLC.

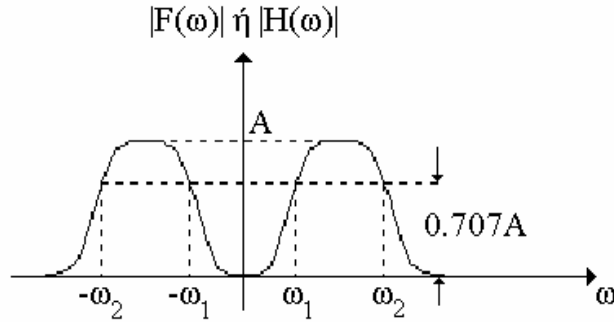
1.6.3 Υψηλεπερατό φίλτρο (*High-Pass Filter, HPF*)

Αυτό επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συχνότητα ω_0 και πάνω. Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς του $H(\omega)$ καθώς και ένα κύκλωμα, που το προσομοιώνει στην πράξη, δίνονται στο Σχήμα 1.19.



Σχήμα 1.19. (α) Το υψηλεπερατό φίλτρο και (β) η προσομοίωσή του με κύκλωμα RC.

Οι ιδέες, που εισήχθησαν με τη συζήτηση περί φίλτρων, διευκολύνουν την εισαγωγή της έννοιας του εύρους ζώνης σημάτων και συστημάτων. Έτσι, ως **εύρος ζώνης** ενός σήματος (συστήματος) μπορεί να οριστεί το διάστημα συχνοτήτων που διέρχονται στον θετικό ημιάξονα των συχνοτήτων ω της συνάρτησης $|F(\omega)|$ ($|H(\omega)|$). Έτσι, το χαμηλοπερατό φίλτρο (*LPF*) έχει εύρος ζώνης ω_0 , το ζωνοπερατό $\omega_2 - \omega_1$ και το υψηλεπερατό άπειρο εύρος ζώνης. Σημειώνεται ότι ο ορισμός, που δόθηκε παραπάνω, ουσιαστικά προϋποθέτει ότι το εύρος ζώνης μετρείται εκεί που το $|F(\omega)|$ (ή το $|H(\omega)|$) παραμένει σταθερό. Στην πράξη, το εύρος ζώνης πρέπει να μετρείται εκεί που το $|F(\omega)|$ (ή το $|H(\omega)|$) παραμένει **περίπου** σταθερό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.20. Εδώ το εύρος ζώνης είναι ίσο με $B = \omega_2 - \omega_1$, όπου οι συχνότητες αυτές είναι τα σημεία στα οποία η μέγιστη τιμή A του $|F(\omega)|$ (ή του $|H(\omega)|$) "πέφτει" στο $0.707A$ (δηλαδή κατά 3 dB από τη μέγιστη τιμή του). Από την εξίσωση (1.71) είναι γνωστό ότι το "πλάτος" του Μ/Σ *Fourier* και το "πλάτος" του σήματος στο πεδίο του χρόνου συνδέονται αντίστροφα. Άρα, όσο πιο μεγάλο είναι το εύρος ζώνης, τόσο πιο μικρής χρονικής διάρκειας είναι το σήμα και αντίστροφα.



Σχήμα 1.20. Ορισμός του εύρους ζώνης του σήματος $f(t)$ ή του συστήματος $h(t)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

8. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τη χρονική διάρκεια με το εύρος ζώνης.

Απάντηση

Από τις σχέσεις (1.65) προκύπτει: $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ και $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$. Διαίρεση

κατά μέλη των δύο παραπάνω σχέσεων δίνει $\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}{f(0)} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega}{F(0)} = 2\pi$. Οι δύο

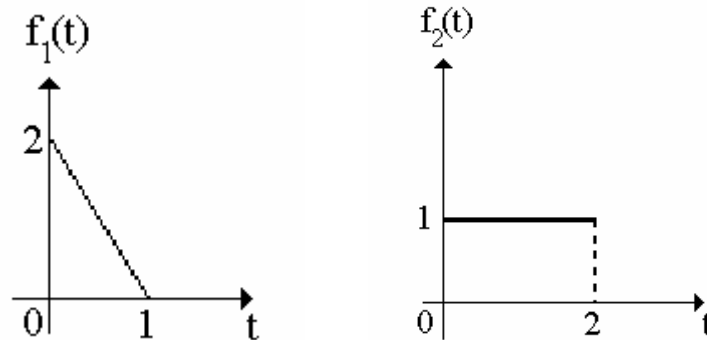
παράγοντες του αριστερού μέλους της τελευταίας εξίσωσης είναι ουσιαστικά το εμβαδόν της συνάρτησης (χρόνου ή συχνότητας) προς την τεταγμένη της αρχής και μπορούν να θεωρηθούν σαν ισοδύναμη χρονική διάρκεια και ισοδύναμο εύρος ζώνης. Αξίζει να σημειωθεί ότι, ενώ το κέντρο συμμετρίας της $F(\omega)$ είναι το μηδέν, δεν είναι σίγουρο ότι συμβαίνει το ίδιο για την $f(t)$. Έτσι, αν t_0 είναι το κέντρο συμμετρίας της

$f(t)$, από την τελευταία εξίσωση προκύπτει: $\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}{f(t_0)} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega}{F(0)} = 2\pi$. Η σχέση

αυτή δείχνει ότι όταν τα ισοδύναμα πλάτη υπάρχουν ($f(t_0), F(0) \neq 0$), τότε το γινόμενο τους είναι σταθερό και ίσο με 2π . Άρα, αύξηση του ενός παράγοντα συνεπάγεται τη μείωση του άλλου. Αυτό το συμπέρασμα θυμίζει την αρχή της αβεβαιότητας στην

Κβαντομηχανική, όπου ως γνωστόν ισχύει: $[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x} = i\hbar$, όπου \hat{x} , \hat{p}_x και \hbar είναι οι τελεστές της θέσης, της ορμής και η σταθερά του *Planck*, αντίστοιχα.

9. Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $f_1(t)$ και $f_2(t)$ του παρακάτω σχήματος.



Απάντηση

Οι αναλυτικές εκφράσεις των σημάτων $f_1(t)$ και $f_2(t)$ είναι: $f_1(t) = (2 - 2t)[u(t) - u(t - 1)]$ και $f_2(t) = u(t) - u(t - 2)$ και επομένως, η συνέλιξη αυτών γράφεται στη μορφή

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2 - 2\tau)[u(\tau) - u(\tau - 1)][u(t - \tau) - u(t - 2 - \tau)] d\tau.$$

Σημειώνεται ότι στην τελευταία σχέση το ολοκλήρωμα πρέπει να υπολογιστεί για κάθε τιμή του t .

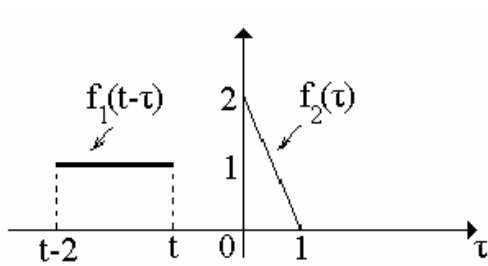
i) Όταν $t < 0$, τότε $f_1 * f_2 = 0$, γιατί δεν υπάρχει κοινό μέρος στις δύο συναρτήσεις (καμπύλη (α)).

ii) Όταν $0 \leq t \leq 1$, τότε $f_1 * f_2 = \int_0^t (2 - 2\tau) d\tau = 2t - t^2$ (καμπύλη (β)).

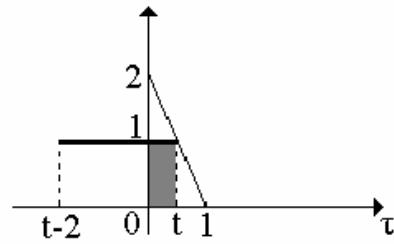
iii) Όταν $1 \leq t \leq 2$, τότε $f_1 * f_2 = \int_0^1 (2 - 2\tau) d\tau = 1$ (καμπύλη (γ)).

iv) Όταν $2 \leq t \leq 3$, τότε $f_1 * f_2 = \int_{t-2}^1 (2 - 2\tau) d\tau = 9 - 6t - t^2$ (καμπύλη (δ)).

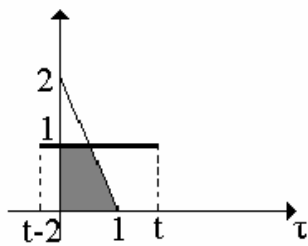
v) Όταν $t \geq 3$, τότε $f_1 * f_2 = 0$, (καμπύλη (ε)).



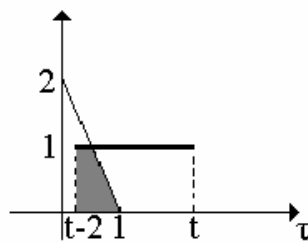
(α)



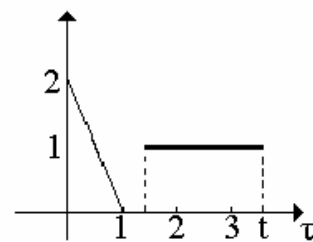
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

10. Να βρεθεί ο Μ/Σ *Fourier* του σήματος $f(t) = \cos(\omega_0 t)$.

Από τον ορισμό του Μ/Σ *Fourier* προκύπτει:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt \right]$$

Με χρήση της ιδιότητας $Ae^{i\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega - \omega_0)$ τα ολοκληρώματα της τελευταίας

σχέσης γράφονται $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$.

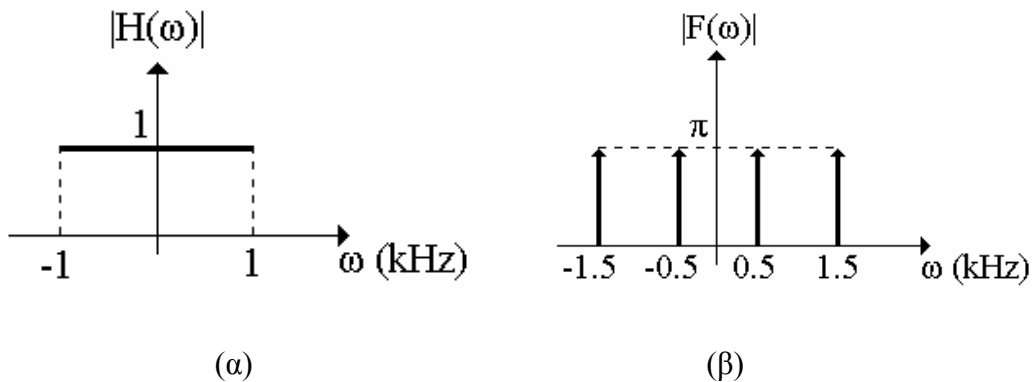
Άρα, $\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$.

11. Σε χαμηλοπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_0 = 1$ kHz εισάγεται το σήμα $x(t) = \cos(500t) + \cos(1500t)$. Να βρεθεί το σήμα της εξόδου του φίλτρου $|y(t)|$.

Απάντηση

Αρχικά, το φίλτρο έχει τη συνάρτηση μεταφοράς, η οποία δίνεται στη καμπύλη (α) του παρακάτω σχήματος, όπου για διευκόλυνση της ανάλυσης έχει τεθεί $|H(\omega)| = 1$, $|\omega| \leq$

ω_0 . Από την άλλη μεριά, ο μετασχηματισμός *Fourier* του σήματος εισόδου είναι $F(\omega) = \pi[\delta(\omega - 500) + \delta(\omega + 500) + \delta(\omega - 1500) + \delta(\omega + 1500)]$ και το πλάτος του $|F(\omega)|$ δίνεται στη καμπύλη (β) του παρακάτω σχήματος. Η έξοδος του φίλτρου θα δίνεται από τη σχέση $|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)|$, δηλαδή από το γινόμενο των δύο σχημάτων. Είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα είναι $|Y(\omega)| = \pi[\delta(\omega - 500) + \delta(\omega + 500)]$, δηλαδή $|y(t)| = \cos(500t)$. Το φίλτρο λοιπόν "έκοψε" την "υψηλή" συχνότητα των 1.5 kHz και επέτρεψε τη διέλευση μόνο της χαμηλής συχνότητας των 0.5 kHz.



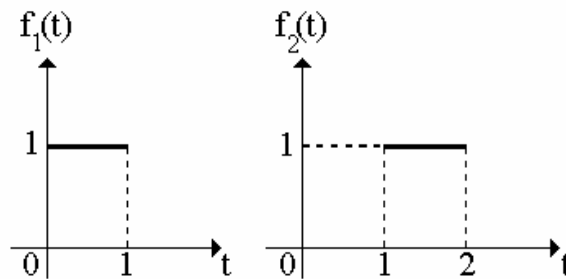
1.7 Θεωρία Συσχέτισης

Στην ενότητα αυτή θα συζητηθεί ο τρόπος, με τον οποίο μπορεί να βρεθεί η τυχόν ομοιότητα (συσχέτιση) μεταξύ δύο σημάτων. Αυτό το πρόβλημα έχει μεγάλο αριθμό πρακτικών εφαρμογών, π.χ. η σύγκριση δύο σημάτων που οδηγεί στην ανίχνευση ανωμαλιών στους ηλεκτροκαρδιογράφους ή στους ηλεκτρο-εγκεφαλογράφους. Επίσης, στα συστήματα *radar* και στα *sonar* η απόφαση της ύπαρξης ενός αντικειμένου βασίζεται στη σύγκριση του σήματος, το οποίο εστάλη, με εκείνο που ελήφθη. Τέλος, στις τηλεπικοινωνίες η Θεωρία Συσχέτισης, μεταξύ των άλλων, χρησιμοποιείται και στην ανίχνευση πληροφοριακών σημάτων παρουσία προσθετικού θορύβου.

Το μαθηματικό πρόβλημα της εύρεσης μιας έκφρασης, η οποία να δίνει κάποιο αριθμό με τη βοήθεια του οποίου να μπορεί κανείς να συσχετίσει δύο σήματα, μπορεί να τεθεί ως εξής: όταν ο αριθμός είναι μεγάλος, τότε η ομοιότητα είναι μεγάλη, ενώ όταν ο αριθμός είναι μικρός (ή μηδέν), τότε η ομοιότητα είναι μικρή (ή μηδενική). Μια πρώτη σκέψη για τη ζητούμενη μαθηματική έκφραση με τις παραπάνω ιδιότητες οδηγεί στο εσωτερικό γινόμενο δύο σημάτων:

$$(f_1(t), f_2(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)dt \quad (1.84)$$

Αν σκεφτεί κανείς την αντιστοιχία με τον Ευκλείδειο χώρο, τα σήματα (διανύσματα) θα μοιάζουν πολύ (παράλληλα), όταν το εσωτερικό τους γινόμενο μεγιστοποιείται, ενώ δεν θα μοιάζουν καθόλου (κάθετα), όταν το εσωτερικό τους γινόμενο μηδενίζεται. Παρόλα αυτά όμως η έκφραση (1.84) δεν είναι αρκετή και αυτό γίνεται κατανοητό με τη βοήθεια των σημάτων $f_1(t)$ και $f_2(t)$ του Σχήματος 1.21.



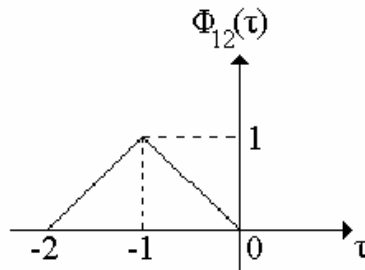
Σχήμα 1.21. Δύο όμοια σήματα που έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν.

Τα σήματα αυτά, αν και ικανοποιούν τη σχέση $f_2(t) = f_1(t - 1)$, δηλαδή είναι πολύ όμοια μεταξύ τους, με βάση το κριτήριο της σχέσης (1.84) είναι άσχετα μεταξύ τους. Είναι φανερό αμέσως ότι δημιουργείται ένα σοβαρό πρόβλημα: αν σκεφτεί κανείς ότι το $f_1(t)$ είναι το σήμα, που στέλνει ο πομπός ενός *radar* τη στιγμή $t = 0$ και το $f_2(t)$ είναι το σήμα που επιστρέφει από ανάκλαση, η απόφαση για την ύπαρξη του αντικειμένου θα είναι εντελώς εσφαλμένη με βάση την (1.84). Με βάση τα παραπάνω, είναι λογικό η εξίσωση (1.84) να χρειάζεται κάποια τροποποίηση, ώστε να λαμβάνει υπόψη τις τυχόν μετατοπίσεις του ενός σήματος σε σχέση με το άλλο. Έτσι, προτείνεται η **χρονική συνάρτηση ετεροσυσχέτισης** των $f_1(t)$ και $f_2(t)$, η οποία ορίζεται με την ακόλουθη σχέση:

$$\Phi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t - \tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t + \tau)f_2(t)dt \quad (1.85)$$

όπου το τ αντιπροσωπεύει τη μετατόπιση και όπως θα γίνει φανερό στη συνέχεια η συνάρτηση αυτή έχει όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες.

Με τη βοήθεια του προηγούμενου ορισμού υπολογίζεται η χρονική συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\Phi_{12}(\tau)$ των σημάτων του Σχήματος 1.21. Παρατηρείτε ότι για $\tau > 0$, η $f_2(t - \tau)$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά, οπότε $\Phi_{12}(\tau) = 0$. Για $\tau < 0$, η $f_2(t - \tau)$ μετατοπίζεται προς τα αριστερά, οπότε $\Phi_{12}(\tau) \neq 0$ έως ότου $\tau \leq -2$, οπότε πάλι $\Phi_{12}(\tau) = 0$. Το μέγιστο της $\Phi_{12}(\tau)$ θα είναι στο $\tau = -1$, οπότε τα δύο σήματα συμπίπτουν [είναι $f_2(t + 1) = f_1(t)$]. Ας προσπαθήσει ο αναγνώστης, ακολουθώντας τη διαδικασία του Παραδείγματος 9 της προηγούμενης παραγράφου, να επαληθεύσει ότι η μορφή της $\Phi_{12}(\tau)$ είναι αυτή που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.22.



Σχήμα 1.22. Η συνάρτηση $\Phi_{12}(\tau)$ των σημάτων του σχήματος 1.21.

Σημειώνεται ότι ο ορισμός (1.85) ισχύει για σήματα ενέργειας, ενώ για τα σήματα ισχύος η χρονική συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\Phi_{12}(\tau)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t + \tau) f_2(t) dt \quad (1.86)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω και κλείνοντας τη συζήτηση για την ετεροσυσχέτιση δίνεται ο ακόλουθος ορισμός. Δύο σήματα καλούνται **ασυσχέτιστα**, όταν $\Phi_{12}(\tau) = 0$ για κάθε τ . Προφανώς, μόνο όταν $\Phi_{12}(0) = 0$ τα σήματα αυτά είναι **ορθογώνια**.

Η ιδέα της αυτοσυσχέτισης "προκαλεί" τη σύγκριση σημάτων με τον εαυτό τους, όπου η σύγκριση γίνεται ως προς τη μετατόπιση τ . Έτσι, αν $f_1(t) = f_2(t)$, τότε η **χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια της εξίσωσης (1.85) ως εξής:

$$\Phi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_1(t - \tau) dt \quad (1.87)$$

Το να ενδιαφέρει κάποιον να βρει κατά πόσο ένα σήμα μοιάζει με τον εαυτό του φαίνεται περιεργό, αλλά δεν είναι ακριβώς έτσι, γιατί η συσχέτιση γίνεται για όλες τις τιμές της χρονικής μετατόπισης τ . Έτσι, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του **λευκού θορύβου**, που θα αναλυθεί στην επόμενη ενότητα, δίνεται από τη σχέση $\Phi_{11}(\tau) = \delta(\tau)$, δηλαδή το σήμα αυτό έχει συσχέτιση με τον εαυτό του μόνο όταν $\tau = 0$, ενώ λίγο να μετατοπιστεί το αποτέλεσμα που δίνει η σχέση (1.87) είναι μηδέν. Σημειώνεται ακόμα η σπουδαιότητα της έννοιας της χρονικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης λόγω της εμπλοκής της στο περίφημο Θεώρημα των *Wiener-Khintchine*, το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω. Η χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i) Η χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\Phi_{11}(\tau)$ ενός σήματος ενέργειας στο $\tau = 0$ δίνει την ενέργεια του σήματος, δηλαδή:

$$\Phi_{11}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \quad (1.88)$$

ενώ αν το $f(t)$ είναι σήμα ισχύος, η $\Phi_{11}(0)$ δίνει την ισχύ του $f(t)$.

- ii) Η $\Phi_{11}(\tau)$ είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή: $\Phi_{11}(\tau) = \Phi_{11}(-\tau)$ (1.89)

- iii) Η $\Phi_{11}(\tau)$ έχει τη μέγιστη τιμή της, όταν η μετατόπιση τ είναι μηδέν (αυτό είναι προφανώς αναμενόμενο), δηλαδή:

$$\Phi_{11}(0) \geq \pm \Phi_{11}(\tau) \text{ για κάθε } \tau \neq 0 \quad (1.90)$$

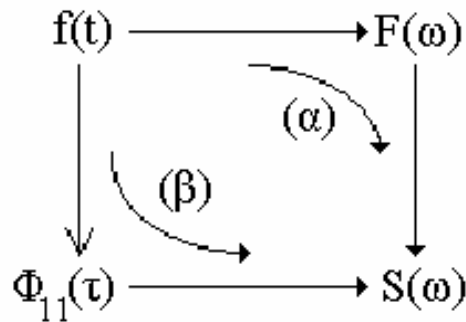
- iv) **Το Θεώρημα των *Wiener-Khintchine***

Η φασματική πυκνότητα ενέργειας ενός σήματος ισούται με το Μ/Σ *Fourier* της χρονικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης:

$$S(\omega) = |F(\omega)|^2 = \mathfrak{Z}[\Phi_{11}(\tau)] \quad (1.91)$$

Σημειώνεται ότι η ιδιότητα αυτή, έτσι όπως διατυπώνεται, ισχύει για σήματα ενέργειας. Αν το θεωρούμενο σήμα είναι σήμα ισχύος, τότε ο Μ/Σ *Fourier* της $\Phi_{11}(\tau)$ δίνει τη φασματική πυκνότητα ισχύος. Η μεγάλη σπουδαιότητα του θεωρήματος αυτού οφείλεται στο ότι προσφέρει έναν εναλλακτικό τρόπο για τον προσδιορισμό της φασματικής πυκνότητας ενέργειας (ή ισχύος). Η ιδέα αυτή φαίνεται από το λεγόμενο **τετράγωνο των *Wiener-Khintchine***, το οποίο δίνεται στο Σχήμα 1.23, και σύμφωνα με το οποίο όταν είναι δύσκολο ή δεν μπορεί να βρεθεί το $S(\omega)$ από τον κανονικό δρόμο

(διαδρομή (α)), πράγμα το οποίο συμβαίνει κυρίως με τα στοχαστικά σήματα (π.χ. θόρυβος), μπορεί κανείς να ακολουθήσει τη διαδρομή (β) .



Σχήμα 1.23. Το τετράγωνο Wiener-Khintchine.

Ίσως να φαίνεται περίεργο στον αναγνώστη, πώς ένας θόρυβος, ο οποίος χαρακτηρίζεται αποκλειστικά από τα στατιστικά χαρακτηριστικά του (μέση τιμή, διασπορά, κ.λ.π.) μπορεί να χαρακτηριστεί (όπως προαναφέρθηκε) και από τη **χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης**. Ευτυχώς όμως, στην πράξη, πάρα πολλά είδη θορύβου (και γενικότερα στοχαστικών διαδικασιών) έχουν την πολύ σπουδαία ιδιότητα της **εργοδικότητας**. Η εργοδικότητα είναι μια πολύ σημαντική έννοια, που συναντάται σε πολλούς κλάδους της Φυσικής, και μπορεί να περιγραφεί απλά με τον ακόλουθο τρόπο για τη συγκεκριμένη περίπτωση: όταν οι στατιστικοί μέσοι όροι (και γενικότερα οι ροπές) και οι χρονικοί μέσοι όροι (και γενικότερα οι ροπές) ενός θορύβου ταυτίζονται, τότε αυτός χαρακτηρίζεται ως **εργοδικός**. Δηλαδή, όταν η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός θορύβου $x(t)$, που συμβολίζεται συνήθως με $R_x(\tau)$, είναι ίδια με τη χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του, ο θόρυβος είναι εργοδικός (ως προς τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης). Αφού λοιπόν στην περίπτωση αυτή $\Phi_{xx}(\tau) = R_x(\tau)$, μπορεί κανείς να υπολογίσει με βάση το θεώρημα *Wiener-Khintchine* τη φασματική πυκνότητα ισχύος (ή ενέργειας) του θορύβου. Το γεγονός αυτό είναι πολύ μεγάλης σπουδαιότητας και η αξία του θα αναδειχτεί στο επόμενο κεφάλαιο περί θορύβου. Σημειώνεται ότι στο τέλος της ενότητας υπάρχει ο Πίνακας 1.4 (σελίδα 56), όπου δίνονται διάφορα ζευγάρια συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και αντίστοιχων φασματικών πυκνοτήτων. Τα ζεύγη αυτά των συναρτήσεων $R_x(\tau)$ και $S_x(\omega)$ είναι εκείνα, τα οποία συναντώνται πιο συχνά στην πράξη.

Αφού η συζήτηση στο τέλος αυτής της ενότητας στράφηκε στο θόρυβο, κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί μια σπουδαία εφαρμογή για το πώς είναι δυνατόν με τις έννοιες της αυτοσυσχέτισης και της ετεροσυσχέτισης να ανιχνευθεί ένα περιοδικό σήμα, το οποίο είναι "πνιγμένο" σε προσθετικό θόρυβο. Για να τεθεί καλύτερα το πρόβλημα, έστω ένα περιοδικό σήμα $s(t)$, που πρόκειται να ληφθεί από κάποιο δέκτη. Στη διαδρομή μέχρι το δέκτη υπάρχει προσθετικός θόρυβος $N(t)$, έτσι ώστε το τελικά λαμβανόμενο σήμα να είναι γενικά της μορφής $x(t) = s(t) + N(t)$. Το πρόβλημα, που πρέπει να λυθεί, είναι το αν το σήμα $x(t)$ περιέχει το $s(t)$ [δηλαδή αν $x(t) = s(t) + N(t)$] ή είναι μόνο θόρυβος [δηλαδή $x(t) = N(t)$]. Για την ανίχνευση μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο η αυτοσυσχέτιση όσο και η ετεροσυσχέτιση και ο αναγνώστης παραπέμπεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

12. Να αποδειχτεί ότι αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T_0 , τότε και η μέση χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\overline{\Phi}_X(\tau)$ είναι περιοδική με την ίδια περίοδο T_0 .

Απάντηση

Πρέπει ν' αποδειχτεί ότι $\overline{\Phi}_X(\tau) = \overline{\Phi}_X(\tau + T_0)$. Είναι όμως:

$$\overline{\Phi}_X(\tau + T_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t - \tau - T_0)dt \text{ και με την αλλαγή } t - \tau = t' \text{ είναι:}$$

$$\overline{\Phi}_X(\tau + T_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2 - \tau}^{T/2 + \tau} x(t' + \tau)x(t' - T_0)dt' = \frac{1}{T} \int_{-T/2 - \tau}^{T/2 + \tau} x(t' + \tau)x(t')dt'$$

όπου παραπάνω χρησιμοποιήθηκε ότι η $x(t)$ είναι περιοδική, δηλαδή $x(t' - T_0) = x(t')$.

Έτσι, με την αλλαγή μεταβλητής $t' + \tau = t_1$, η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$\overline{\Phi}_X(\tau + T_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t_1)x(t_1 - \tau)dt_1 = \overline{\Phi}_X(\tau)$$

Σημειώνεται ότι η χρήση της ιδιότητας αυτής βρίσκει εφαρμογή στην ανίχνευση ενός σήματος σε προσθετικό θόρυβο, που θα παρουσιαστεί αμέσως μετά.

13. Ανίχνευση σήματος σε προσθετικό θόρυβο με τη χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Να διατυπωθεί μαθηματικά η διαδικασία ανίχνευσης ενός περιοδικού σήματος $s(t)$ "χαμένου" σε προσθετικό θόρυβο $N(t)$. Δίνεται ότι η ετεροσυσχέτιση σήματος και θορύβου είναι μηδέν και η αυτοσυσχέτιση του θορύβου τείνει στο μηδέν όταν $|\tau| \rightarrow +\infty$.

Απάντηση

Το σήμα που ενδιαφέρει είναι το $x(t) = s(t) + N(t)$ και το πρόβλημα είναι αν το $x(t)$ περιέχει το σήμα $s(t)$ ή είναι μόνο θόρυβος. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί εύκολα με τη βοήθεια της (μέσης) χρονικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, η οποία για το σήμα $x(t)$ είναι:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_{XX}}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t)+N(t)][s(t-\tau)+N(t-\tau)]dt \\ &= \overline{\Phi_{SS}}(\tau) + \overline{\Phi_{NN}}(\tau) + \overline{\Phi_{NS}}(\tau) + \overline{\Phi_{SN}}(\tau) \end{aligned}$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος, τα $s(t)$ και $N(t)$ έχουν ετεροσυσχέτιση μηδέν, άρα $\overline{\Phi_{NS}}(\tau) = \overline{\Phi_{SN}}(\tau) = 0$. Συνεπώς, θα είναι: $\overline{\Phi_{XX}}(\tau) = \overline{\Phi_{SS}}(\tau) + \overline{\Phi_{NN}}(\tau)$

Εξετάζοντας τώρα την $\overline{\Phi_{XX}}(\tau)$ πρέπει ν' αποφασιστεί αν:

- α) το σήμα $x(t)$ περιέχει το σήμα $s(t)$, δηλαδή $x(t) = s(t) + N(t)$, ή
- β) το σήμα $x(t)$ είναι θόρυβος, δηλαδή $x(t) = N(t)$.

Το κριτήριο, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί βασίζεται στην προηγούμενη εφαρμογή. Είναι γνωστό ότι η μέση αυτοσυσχέτιση ενός περιοδικού σήματος είναι επίσης περιοδική συνάρτηση (με την ίδια περίοδο), δηλαδή η $\overline{\Phi_{SS}}(\tau)$ είναι περιοδική. Επιπλέον, εφόσον

δίνεται ότι $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \overline{\Phi_{NN}}(\tau) = 0$ είναι προφανές ότι για μεγάλες τιμές του τ υπάρχουν δύο

ενδεχόμενα για την $\overline{\Phi_{XX}}(\tau)$:

- α) η $\overline{\Phi_{XX}}(\tau)$ είναι περιοδική \Rightarrow το $x(t)$ περιέχει το $s(t)$

β) η $\overline{\Phi}_{XX}(\tau)$ δεν είναι περιοδική και μάλιστα τείνει στο μηδέν \Rightarrow το $x(t)$ δεν περιέχει το $s(t)$, δηλαδή είναι θόρυβος.

Σημειώνεται ότι η μέθοδος, που έχει περιγραφεί, βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στη λήψη σημάτων *radar*, *sonar*, στην ανακάλυψη περιοδικής συνιστώσας στα εγκεφαλικά κύματα κ.λ.π.

Στην πράξη βέβαια, δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η παραπάνω μέθοδος υποθέτοντας το $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_{XX}(\tau) = 0$. Αυτό που γίνεται είναι να πάρει κανείς ένα "αρκετά μεγάλο" T στην έκφραση της $\overline{\Phi}_{XX}(\tau)$, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

14. Το σήμα $s(t) = 10\sin(\pi t)$ πρέπει να ανιχνευθεί παρουσία προσθετικού θορύβου με τη βοήθεια της αυτοσυσχέτισης. Αν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του θορύβου είναι η $\overline{\Phi}_{NN}(\tau) = 20e^{-|\tau|}$, να βρείτε (α) τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και (β) μετά από ποια τιμή του τ γίνεται φανερή η ανίχνευση.

Απάντηση

Όπως είδαμε παραπάνω $\overline{\Phi}_{XX}(\tau) = \overline{\Phi}_{SS}(\tau) + \overline{\Phi}_{NN}(\tau)$. Είναι όμως:

$$\overline{\Phi}_{SS}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} 10\sin(\pi t) 10\sin[\pi(t-\tau)] dt = 50 \int_{-1}^{+1} \sin(\pi t) \sin[\pi(t-\tau)] dt = 50\cos(\pi\tau)$$

Άρα, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι: $\overline{\Phi}_{XX}(\tau) = 50\cos(\pi\tau) + 20e^{-|\tau|}$. Η ανίχνευση επιτυγχάνεται πέρα από κάποιο τ_0 , που ικανοποιεί τη συνθήκη $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \overline{\Phi}_{NN}(\tau) = 0$ για κάθε $\tau > \tau_0$. Επειδή η $\overline{\Phi}_{NN}(\tau)$ είναι εκθετικής μορφής γίνεται φανερό ότι $\tau_0 \cong 5$.

15. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ετεροσυσχέτιση δύο περιοδικών σημάτων της ίδιας περιόδου είναι κι αυτή περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο, προτείνετε μια διαδικασία ανίχνευσης περιοδικού σήματος σε προσθετικό θόρυβο (ο οποίος θεωρείται ασυσχέτιστος με περιοδικά σήματα) με την έννοια της **ετεροσυσχέτισης**.

Απάντηση

Όπως και προηγούμενα, το πρόβλημα είναι να αποφανθεί κανείς αν το σήμα $x(t)$ περιέχει ή όχι το περιοδικό σήμα $s(t)$, δηλαδή αν $x(t) = s(t) + N(t)$ ή $x(t) = N(t)$ (μόνο θόρυβος). Η μέση τιμή της συνάρτησης ετεροσυσχέτισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τον εξής τρόπο. Έστω ότι το σήμα $x(t)$ φτάνει σε κάποιο δέκτη και ετεροσυσχετίζεται με κάποιο σήμα $c(t)$, που παράγεται λ.χ. στο δέκτη από ένα ταλαντωτή και το οποίο έχει την ίδια περίοδο T με το σήμα $s(t)$. Τότε, η μέση συνάρτηση ετεροσυσχέτισης των $x(t)$ και $c(t)$ θα είναι:

$$\overline{\Phi}_{XC}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t) + N(t)]c(t - \tau) dt = \overline{\Phi}_{SC}(\tau) + \overline{\Phi}_{NC}(\tau)$$

Επειδή από την υπόθεση είναι $\overline{\Phi}_{NC}(\tau) = 0$, έπεται ότι $\overline{\Phi}_{XC}(\tau) = \overline{\Phi}_{SC}(\tau)$. Έτσι, η ανίχνευση του σήματος $s(t)$ μπορεί να γίνει εύκολα ως εξής:

- α) Αν η $\overline{\Phi}_{XC}(\tau)$ είναι περιοδική και μάλιστα της ίδιας περιόδου T που έχει το $s(t)$, τότε προφανώς το $x(t)$ περιέχει το $s(t)$.
- β) Αν το σήμα $x(t)$ είναι μόνο θόρυβος, τότε θα είναι $\overline{\Phi}_{SC}(\tau) = \overline{\Phi}_{NC}(\tau) = 0$.

Γίνεται αμέσως φανερό ότι η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στην περίπτωση κατά την οποία είναι γνωστή η περίοδος του σήματος, το οποίο πρόκειται να ανιχνευθεί. Στο σημείο αυτό βρίσκεται και η διαφορά της με τη μέθοδο ανίχνευσης με αυτοσυσχέτιση.

Συγκρίνοντας τις δύο μεθόδους ανίχνευσης θα μπορούσε κανείς να πει ότι, ενώ στην ανίχνευση με αυτοσυσχέτιση απαιτείται η ανίχνευση να γίνει για μεγάλες τιμές του τ , στη μέθοδο με ετεροσυσχέτιση η "a priori" γνώση της περιόδου επιτρέπει την ανίχνευση για κάθε τιμή του τ .

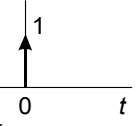
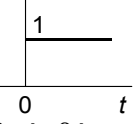
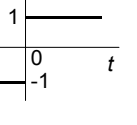
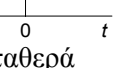
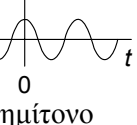
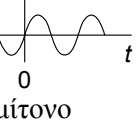

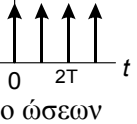
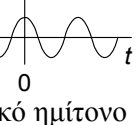
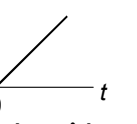
ΠΙΝΑΚΑΣ 1: ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

ΜΟΡΦΗ	ΣΕΙΡΑ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ	ΤΥΠΟΙ ΑΛΛΑΓΗΣ
Εκθετική	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$	$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$	$F_0 = a_0$ $F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$
Τριγωνομετρική Α	$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$	$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$	$a_n = (F_n + F_{-n})$ $b_n = j(F_n - F_{-n})$ $a_0 = F_0$
Τριγωνομετρική Β	$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \Phi_n)$		$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 F_n $ $\Phi_n = -\tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)$

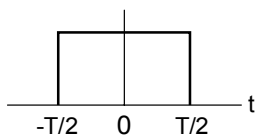
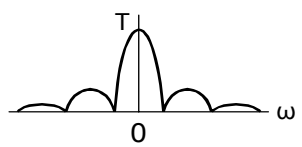
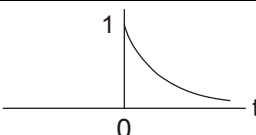
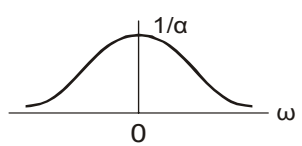
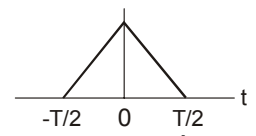
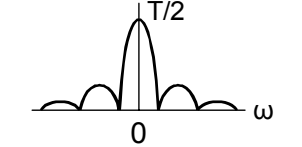
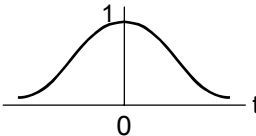
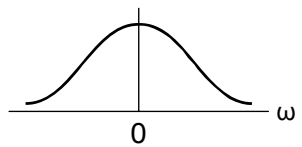
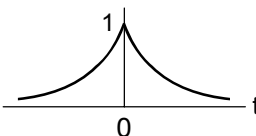
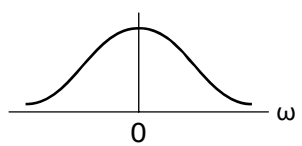
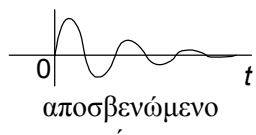
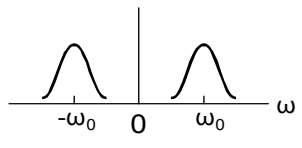
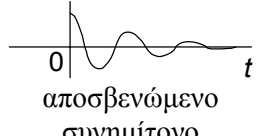
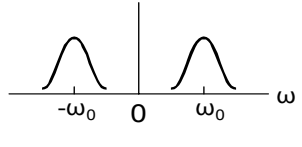
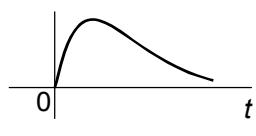
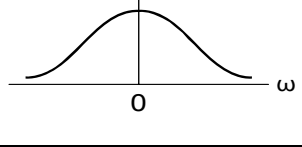
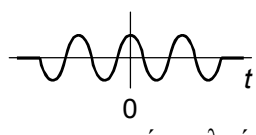
**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ**

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	f(t)	F(ω)
Μετασχηματισμός	$f(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$
Αντιστροφή	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$	$F(\omega)$
Υπέρθθεση	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
Αναστροφή	$f(-t)$	$F(-\omega)$
Συμμετρία	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Κλιμάκωση	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Καθυστέρηση	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
Διαμόρφωση	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
Χρονική Διαφόριση	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
Διαφόριση στη Συχνότητα	$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
Ολοκλήρωση	$\int_0^t f(t')dt' + \int_{-\infty}^t f(t')dt'$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t f(t')dt'$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
Δίπλωση	$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)f_2(t - \lambda)d\lambda$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
Γινόμενο	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\xi)F_2(\omega - \xi)d\xi$

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER ΣΗΜΑΤΩΝ
ΙΣΧΥΟΣ**

$f(t)$	$F(\omega)$	$ F(\omega) $
 μοναδιαία κρουστική συνάρτηση	$\delta(t)$	1
 μοναδιαίο βήμα	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
 $\text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$	$\text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$	$\frac{2}{j\omega}$
 σταθερά	K	$2\pi K\delta(\omega)$
 συνημίτονο	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
 ημίτονο	$\sin \omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
 περιοδικό σήμα	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_T(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$
 τρένο ώσεων	$\sum \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$
 μιγαδικό ημίτονο	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
 μοναδιαίας κλίσης	$tu(t)$	$j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1.4: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER ΣΗΜΑΤΩΝ
ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ**

$f(t)$	$F(\omega)$	$ F(\omega) $
 τετραγωνικός παλμός	$u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)$	$T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$ 
 εκθετικό	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{j\omega + a}$ 
 τριγωνικό	$t - 2\frac{ t }{T}, \quad t < \frac{T}{2}$ $0, \quad \text{αλλού}$	$\frac{T}{2} \left[\frac{\sin(\omega T/4)}{\omega T/4} \right]^2$ 
 Gaussian	$e^{-a^2t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-(\omega^2/4a^2)}$ 
 διπλό εκθετικό	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ 
 αποσβενώμενο ημίτονο	$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ 
 αποσβενώμενο συνημίτονο	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ 
 	$\frac{1}{\beta - \alpha} [e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}]u(t)$	$\frac{1}{(j\omega + \alpha)(j\omega + \beta)}$ 
 συνημιτονικός παλμός	$\cos(\omega_0 t) \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$	$\frac{T}{2} \left[\frac{\sin(\omega - \omega_0)T/2}{(\omega - \omega_0)T/2} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)T/2}{(\omega + \omega_0)T/2} \right]$ 