ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΡΑΔΙΟΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ (Ρ/Η)

ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΩΝ

2ο ΕΞΑΜΗΝΟ Ρ/Η

Ιωάννης Γ. Τίγκελης, Αν. Καθηγητής, Τμήμα Φυσικής

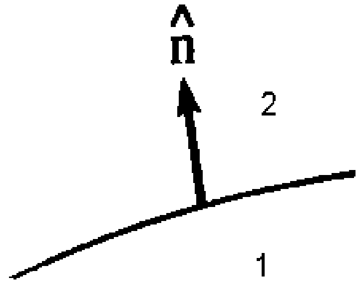
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL (1)

Εξισώσεις Maxwell $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\cdot D=\rho$

Απουσία εξωτερικών πηγών: $\vec{J}=0,\quad \rho=0$

Οριακές Συνθήκες



$$\hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0,\quad \hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{K}_s$$

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma,\quad \hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0$$

$\vec{K}_s$ επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος, σ επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

Η πυκνότητα ισχύος δίνεται από το διάνυσμα Poynting:

$\vec{S}_{av}=\vec{E}\times\vec{H}$ (στο πεδίο του χρόνου)

$\vec{P}_{av}=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}\times\vec{H}^*\right\}$ (στο πεδίο της συχνότητας)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL (2)

Στην περίπτωση που έχουμε μέσο με πεπερασμένη αγωγιμότητα σ, τότε οι εξισώσεις Maxwell γίνονται:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -i\omega\mu_0 \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + i\omega\varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \left(\sigma + i\omega\varepsilon_0 \right) \vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -i\omega\mu_0 \left(\sigma + i\omega\varepsilon_0 \right) \vec{E}$$

Όμως

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) - \nabla^2 \vec{E} \quad \text{και} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - i\omega\mu_0 \left(\sigma + i\omega\varepsilon_0 \right) \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0$$

$$\gamma^2 = i\omega\mu_0 \left(\sigma + i\omega\varepsilon_0 \right) = i\omega\mu_0\sigma - \omega^2 \mu_0\varepsilon_0 = -\omega^2 \mu_0\varepsilon_0 \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \right)$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL (3)

$$\gamma = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{-1+i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} \equiv \alpha + i\beta,$$

όπου α είναι ο συντελεστής απωλειών $\left(\text{σε Neper/m}\right)$ και

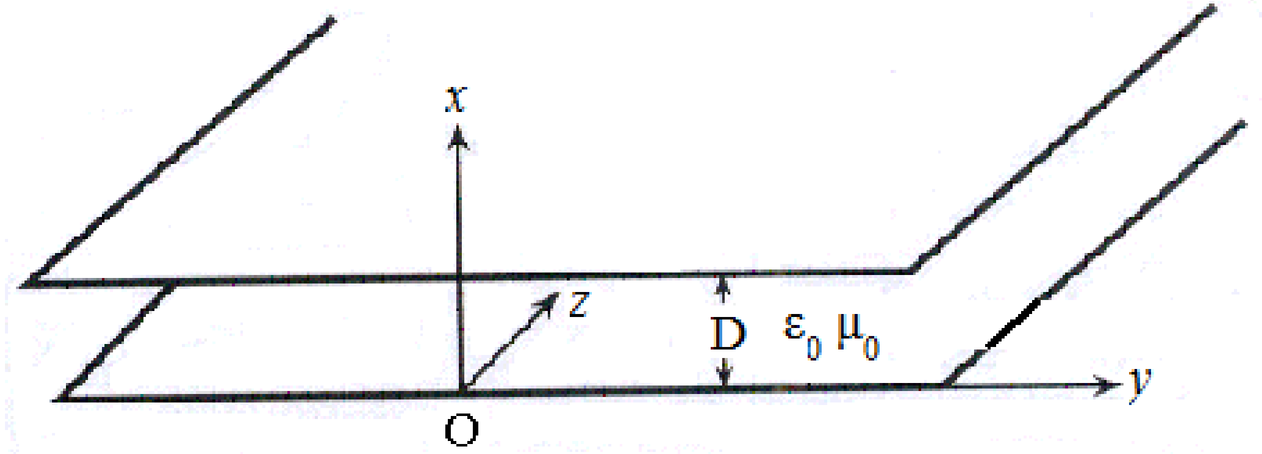
β η σταθερά διάδοσης $\left(\text{σε rad/m}\right)$

Οταν $\sigma/(\omega\varepsilon_0) >> 1$, τότε $\gamma = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma} = \sqrt{\omega\mu_0\sigma}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} \equiv \frac{1}{\delta_s},$$

όπου δ_s είναι το βάθος διείσδυσης, δηλαδή το μήκος μέσα στον αγωγό, στο οποίο το πλάτος του πεδίου έχει μειωθεί στο 1/e της τιμής που είχε πάνω στην επιφάνεια του αγωγού.

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (1)



- Τέλεια αγώγιμα τοιχώματα
- Διάδοση στον άξονα *z*
- Ανεξαρτησία από τη συντεταγμένη *y*
- Ανάλυση στο πεδίο συχνοτήτων για αρμονικά μεταβαλλόμενα πεδία

$$\vec{\mathbf{E}}(x,z,t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}(x,z)\exp(+i\omega t)\right\}, \qquad \vec{E}(x,z) = \vec{e}(x)\exp(-\gamma z)$$

$$\vec{\mathbf{H}}(x,z,t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{H}(x,z)\exp(+i\omega t)\right\}, \qquad \vec{H}(x,z) = \vec{h}(x)\exp(-\gamma z)$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (2)

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-i\omega\mu_0\vec{H}\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ e_x\left(x\right)e^{-\gamma z} & e_y\left(x\right)e^{-\gamma z} & e_z\left(x\right)e^{-\gamma z}\end{vmatrix}=-i\omega\mu_0\vec{h}\left(x\right)e^{-\gamma z}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\dfrac{\partial}{\partial z}\equiv-\gamma$ προκύπτει:

$$\vec{\nabla}\times\vec{e}(x)=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{d}{dx} & 0 & -\gamma\\ e_x\left(x\right) & e_y\left(x\right) & e_z\left(x\right)\end{vmatrix}=-i\omega\mu_0\vec{h}\left(x\right)$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (3)

$$\begin{cases} -i\omega\mu_0 h_x(x) = \gamma e_y(x) & (1.1\text{a}) \\ -i\omega\mu_0 h_y(x) = -\left(\dfrac{de_z(x)}{dx} + \gamma e_x(x)\right) & (1.1\text{b}) \\ -i\omega\mu_0 h_z(x) = \dfrac{de_y(x)}{dx} & (1.1\text{c}) \end{cases}$$

Αντίστοιχα από την εξίσωση $\vec{\nabla} \times \vec{H} = i\omega\varepsilon_0 \vec{E}$ προκύπτουν:

$$\begin{cases} i\omega\varepsilon_0 e_x(x) = \gamma h_y(x) & (1.2\text{a}) \\ i\omega\varepsilon_0 e_y(x) = -\left(\dfrac{dh_z(x)}{dx} + \gamma h_x(x)\right) & (1.2\text{b}) \\ i\omega\varepsilon_0 e_z(x) = \dfrac{dh_y(x)}{dx} & (1.2\text{c}) \end{cases}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (4)

- Οι εξισώσεις (1.1a), (1.1c) και (1.2b) έχουν $e_z = 0$, **μη** μηδενικές συνιστώσες τις e_y, h_x, h_z και αντιστοιχούν σε Εγκάρσια Ηλεκτρικά Κύματα (Transverse Electric, TE)

- Οι εξισώσεις (1.1b), (1.2a) και (1.2c) έχουν $h_z = 0$, **μη** μηδενικές συνιστώσες τις h_y, e_x, e_z και αντιστοιχούν σε Εγκάρσια Μαγνητικά Κύματα (Transverse Magnetic,TM)

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (5)

Κύματα TE

$$\text{(1.1a), (1.1c) και } (1.2b) \Rightarrow i\omega\varepsilon_0 e_y = -\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{de_y}{dx}\right] - \gamma\frac{\gamma e_y}{-i\omega\mu_0} \overset{\times(-i\omega\mu_0)}{\Rightarrow}$$

$$\omega^2\mu_0\varepsilon_0 e_y = -\frac{d^2 e_y}{dx^2} - \gamma^2 e_y \Rightarrow e_y''(x) + \left(\gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\right)e_y(x) = 0 \Rightarrow$$

$$e_y''(x) + k_\perp^2 e_y(x) = 0 \quad (1.3)$$

$$k_\perp^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon_0 = \gamma^2 + (\omega/c)^2 \quad (1.4)$$

Λύση της κυματικής εξίσωσης (1.3)

$$k_\perp^2 = s^2 > 0 \Rightarrow e_y(x) = A'e^{isx} + B'e^{-isx} = A\cos(sx) + B\sin(sx)$$

$$k_\perp^2 = -q^2 < 0 \Rightarrow e_y(x) = Ae^{qx} + Be^{-qx}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (6)

Προφανώς στο συγκεκριμένο πρόβλημα θέλουμε **περιοδικές** λύσεις:

$$e_y\left(x\right) = A\cos\left(k_\perp x\right) + B\sin\left(k_\perp x\right), \quad k_\perp^2 = \gamma^2 + (\omega / c)^2$$

Οριακές Συνθήκες

$$e_y\left(x=0\right) = 0 \quad \text{και} \quad e_y\left(x=D\right) = 0$$

$$e_y\left(x=0\right) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$e_y\left(x=D\right) = 0 \Rightarrow k_\perp D = m\pi, m = 1, 2, 3, \ldots$$

Η λύση $m = 0$ **απορρίπτεται**, γιατί διαφορετικά $e_y = 0$ και $h_x = 0$.

$$k_\perp^2 > 0, \text{δηλαδή} \left(\frac{m\pi}{D}\right)^2 = \gamma^2 + (\omega / c)^2 > 0 \Rightarrow \gamma_m^2 = \left(\frac{m\pi}{D}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (7)

I) $\gamma_m^2 = 0$ αποκοπή $\Rightarrow \omega_m = \dfrac{m\pi c}{D}$ (συχνότητα αποκοπής)

II) $\gamma_m^2 > 0$ απόσβεση $\Rightarrow \omega < \omega_m \Rightarrow \gamma_m = a_m \in R$

III) $\gamma_m^2 < 0$ διάδοση $\Rightarrow \omega > \omega_m \Rightarrow \gamma_m = i\beta_m \in I \Rightarrow \beta_m = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_m^2}}{c}$

$$\beta_m^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\omega_m}{c}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda_{gm}}\right)^2 = \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 - \left(\frac{2\pi f_m}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{gm}^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_m^2}$$

όπου $\lambda_{gm} = \dfrac{2\pi}{\beta_m}$ μήκος κύματος μέσα στον κυματοδηγό,

λ_0 μήκος κύματος ελευθέρου χώρου και λ_m μήκος κύματος αποκοπής

$u_{\varphi m} = \dfrac{\omega}{\beta_m} = \dfrac{c}{\sqrt{1-(\omega_m/\omega)^2}} > c$ φασική ταχύτητα

$u_{gm} = \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta_m} = c\sqrt{1-(\omega_m/\omega)^2} < c$ ταχύτητα ομάδας

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (8)

$$E_y\left(x,z\right)=A\sin\left(\frac{m\pi x}{D}\right)e^{-i\beta_m z},\quad H_x\left(x,z\right)=-\frac{\beta_m}{\omega\mu_0}E_y\left(x,z\right)$$

$$H_z\left(x,z\right)=-\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\frac{1}{i\omega\mu_0}A\left(\frac{m\pi}{D}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{D}\right)e^{-i\beta_m z}$$

Η ισχύς που μεταφέρεται από το ρυθμό είναι:

$$\vec{P}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}\times\vec{H}^*\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & E_y & 0\\ H_x^* & 0 & H_z^*\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{x}E_yH_z^*-\hat{z}E_yH_x^*\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\hat{z}\,\mathrm{Re}\left\{-\frac{\beta_m}{\omega\mu_0}E_yE_y^*\right\}=\hat{z}\frac{\beta_m}{2\omega\mu_0}\left|A\right|^2\sin^2\left(\frac{m\pi x}{D}\right)\quad\left[\frac{W}{m^2}\right]$$

$$P_{o\lambda}=\oint\vec{P}_{av}\cdot d\vec{S}=\int_0^D dx\frac{\beta_m}{2\omega\mu_0}\left|A\right|^2\sin^2\left(\frac{m\pi x}{D}\right)=\frac{\beta_m D}{4\omega\mu_0}\left|A\right|^2\quad\left[\frac{W}{m}\right]$$

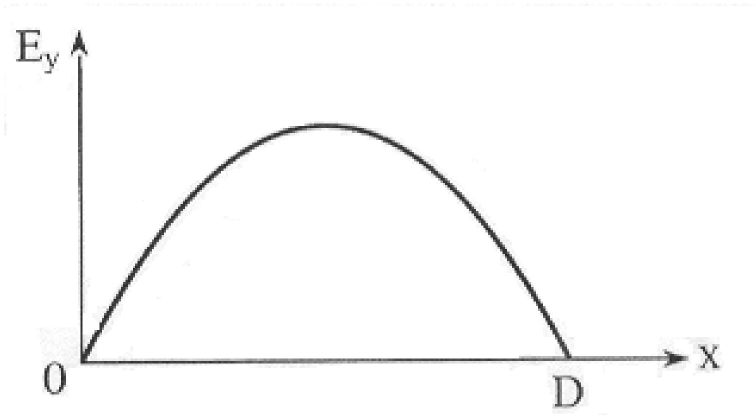
ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (9)

Για τον πρώτο ρυθμό TE$_1$

$$E_y(x,z) = A\sin\left(\frac{\pi x}{D}\right)e^{-i\beta_1 z}$$

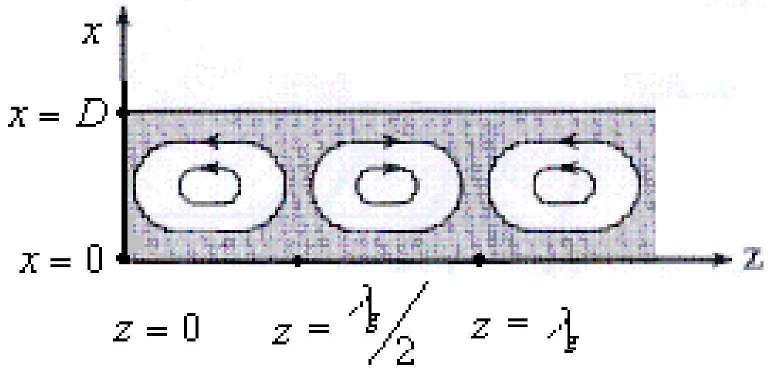
$$H_x(x,z) = -\frac{\beta_1}{\omega\mu_0}A\sin\left(\frac{\pi x}{D}\right)e^{-i\beta_1 z}$$

$$H_z(x,z) = -\frac{1}{i\omega\mu_0}A\left(\frac{\pi}{D}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{D}\right)e^{-i\beta_1 z}$$



$$E_y(x,z,t) = A\sin\left(\frac{\pi x}{D}\right)\cos(\omega t - \beta_1 z)$$

$$H_x\left(x,z,t\right) = -\frac{\beta_1}{\omega\mu_0}A\sin\left(\frac{\pi x}{D}\right)\cos\left(\omega t - \beta_1 z\right)$$

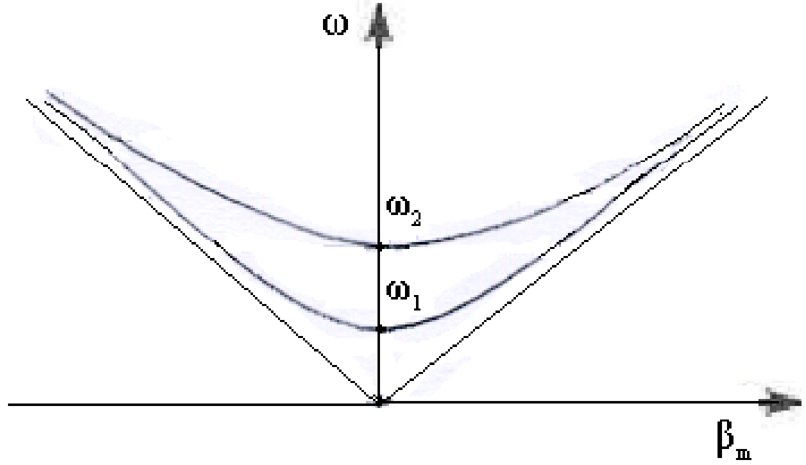


$$H_z\left(x,z,t\right) = \frac{1}{\omega\mu_0}A\left(\frac{\pi}{D}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{D}\right)\cos\left(\omega t - \beta_1 z + \frac{\pi}{2}\right)$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (10)

$$\beta_m^2 = \frac{\omega^2 - \omega_m^2}{c^2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_m^2 + c^2\beta_m^2$$

Οι δύο λύσεις που προκύπτουν για κάθε ω αντιστοιχούν σε διάδοση κατά $+z$ και $-z$, αντίστοιχα



Κυματική ή χαρακτηριστική αντίσταση του ρυθμού TE$_m$

$$Z_{\mathrm{TE}_m} \equiv -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu_0}{\beta_m}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (11)

Όταν ο κυματοδηγός έχει τοιχώματα με πεπερασμένη αγωγιμότητα, τότε αυτά εμφανίζουν επιφανειακή αντίσταση, το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο σε αυτά είναι **μη** μηδενικό και είναι ίσο με $Z_G \mathbf{K}_s$, οπότε έχουμε ωμικές απώλειες στα τοιχώματα:

$$p_{\omega\mu} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot\hat{n}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left(\vec{H}^*\times\hat{n}\right)\cdot\vec{E}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left(\hat{n}\times\vec{H}^*\right)\cdot\vec{E}\right\} = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}\cdot\left(\hat{n}\times\vec{H}^*\right)\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{Z_G\vec{K}_S\cdot\vec{K}_S^*\right\} \Rightarrow$$

$$p_{\omega\mu} = \frac{R_G}{2\sigma\delta_S}\left|\vec{K}_S\right|^2 \Rightarrow$$

$$P_{\omega\mu} = \frac{R_G}{2\sigma\delta_S}\oint_C\left|\vec{K}_S\right|^2 dl$$

όπου $P_{\omega\mu}$ είναι οι ωμικές απώλειες στα τοιχώματα, R_G το πραγματικό μέρος της επιφανειακής αντίστασης των τοιχωμάτων και C η επιφάνεια των τοιχωμάτων που έχουν απώλειες.

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (12)

Τότε τα τοιχώματα έχουν αντίσταση:

$$Z_G = \frac{i\omega\mu_0}{\gamma} = \frac{i\omega\mu_0}{\sqrt{i\omega\mu_0\sigma}} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\sigma}} = \frac{1+i}{\sigma\delta_s}, \quad \vec{E}_t = Z_G\vec{K}_S$$

$$\vec{K}_S(x=0) = \hat{x}\times\vec{H}(0,z) = \hat{x}\times\hat{z}H_z(0,z) = -\hat{y}\frac{-1}{i\omega\mu_0}A\left(\frac{\pi}{D}\right)e^{-i\beta_1 z}$$

$$\Rightarrow \vec{K}_S(x=0) = \hat{y}\frac{1}{i\omega\mu_0}A\left(\frac{\pi}{D}\right)e^{-i\beta_1 z}$$

$$\vec{K}_S(x=D) = -\hat{x}\times\vec{H}(D,z) = -\hat{x}\times\hat{z}H_z(D,z) = \hat{y}\frac{-1}{i\omega\mu_0}A\left(\frac{\pi}{D}\right)\cos(\pi)e^{-i\beta_1 z}$$

$$\Rightarrow \vec{K}_S\left(x=D\right) = \hat{y}\frac{1}{i\omega\mu_0}A\left(\frac{\pi}{D}\right)e^{-i\beta_1 z}$$

$$\left|\vec{K}_S\left(x=0\right)\right|^2 = \left|\vec{K}_S\left(x=D\right)\right|^2 = \left(\frac{A\pi}{\omega\mu_0 D}\right)^2$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (13)

$$P_{\omega\mu} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1+i}{\sigma\delta_S}\vec{K}_S \cdot \vec{K}_S^*\right\} = \frac{1}{2\sigma\delta_S}\left|\vec{K}_S\right|^2 = \frac{\left|\vec{H}_t\right|^2}{2\sigma\delta_S} \Rightarrow$$

$$P_{\omega\mu} = \frac{1}{2\sigma\delta_S}2\left|A\right|^2\left(\frac{\pi}{\omega\mu_0 D}\right)^2 = \frac{\left|A\right|^2}{\sigma\delta_S}\left(\frac{\pi}{\omega\mu_0 D}\right)^2$$

Λαμβάνοντας υπόψη και τις απώλειες το ηλεκτρικό πεδίο γίνεται:

$$\tilde{e}_y\left(x,z\right) = e_y\left(x\right)e^{-az}e^{-i\beta_m z}$$

όπου a είναι ο συντελεστής εξασθένισης πεδίου λόγω ωμικών απωλειών.

Επομένως η μείωση ισχύος κατά μήκος του κυματοδηγού είναι:

$$\Delta P = P(z_0) - P\left(z_0 + \Delta z\right) = P_{\omega\mu}\Delta z,$$

Όμως $P\left(z\right) \propto e^{-2az} \Rightarrow P'\left(z\right) = -2\alpha P\left(z\right)$

$$P_{\omega\mu} = -\frac{P\left(z_0 + \Delta z\right) - P\left(z_0\right)}{\Delta z} = -P'\left(z_0\right) \Rightarrow a = \frac{P_{\omega\mu}}{2P\left(z\right)}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (14)

Κύματα TM

$$h_y''(x) + k_\perp^2 h_y(x) = 0 \Rightarrow h_y(x) = A\sin(k_\perp x) + B\cos(k_\perp x)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} = i\omega\varepsilon_0 \vec{e} \Rightarrow \frac{dh_y}{dx} = i\omega\varepsilon_0 e_z, \gamma h_y = i\omega\varepsilon_0 e_x$$

Το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να μηδενίζεται στα τοιχώματα, δηλαδή $h_y'(x) = Ak_\perp \cos(k_\perp x) - Bk_\perp \sin(k_\perp x)$=0 για $x = 0$ και $x = D$

$$\Rightarrow A = 0 \text{ και } k_\perp D = m\pi, m = 0,1,2,...$$

$$H_y(x,z) = H_0 \cos(k_\perp x) e^{-i\beta z},$$

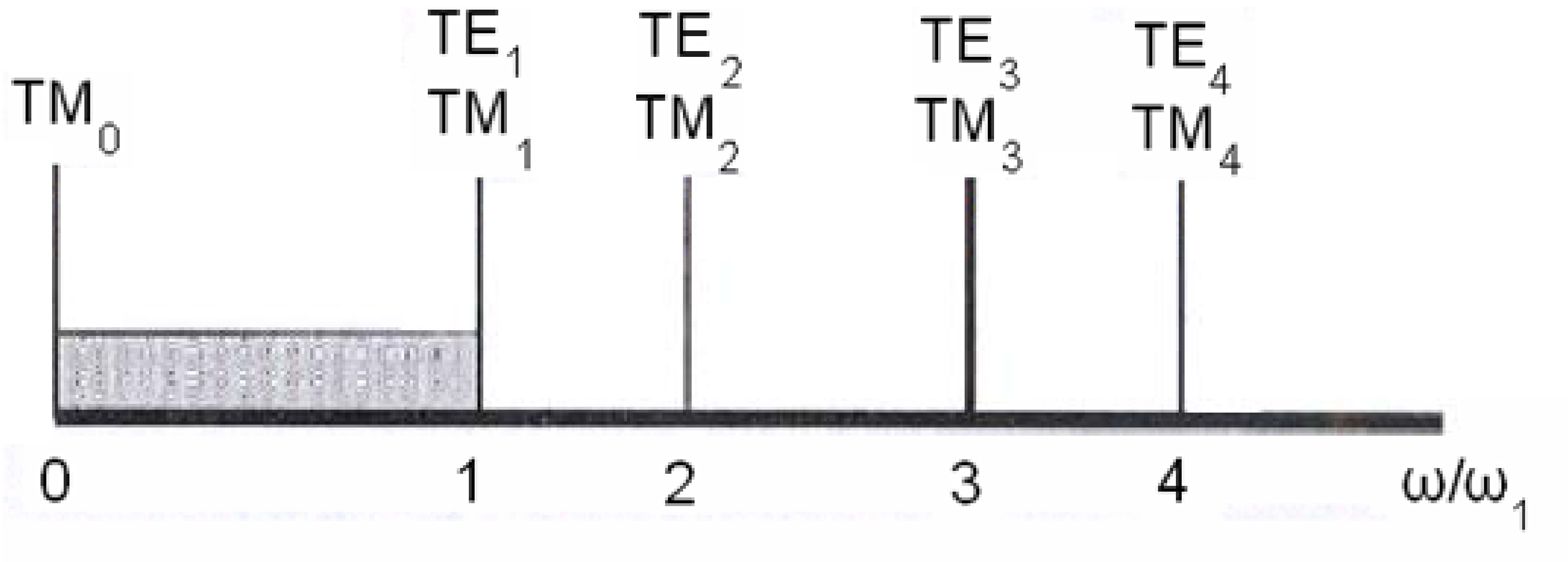
$$E_z(x,z) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0} H_0 k_\perp \sin(k_\perp x) e^{-i\beta z}$$

$$E_x(x,z) = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0} H_0 \cos(k_\perp x) e^{-i\beta z}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (15)

Για $m = 0$ $H_y\left(x,z\right) = H_0 e^{-i\beta z}$ και $E_x\left(x,z\right) = \dfrac{\beta}{\omega\varepsilon_0} H_0 e^{-i\beta z}$

έχουμε επίπεδο κύμα $\left(H_y, E_x \neq 0\right)$ σε αντίθεση με τα ΤΕ.



ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (16)

Άσκηση 1. Έστω ότι σε κυματοδηγό παράλληλων πλακών στο επίπεδο z=0 υπάρχει κατανομή ρεύματος στην κατεύθυνση του θετικού άξονα των y και με συνάρτηση $J_0(x)$. Να βρείτε το είδος κυμάτων που μπορούν να διαδοθούν στις περιοχές $z < 0$ και $z > 0$.

Λύση

$$E_y^I(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{D}\right)\exp(+\gamma_n z),\ z < 0 \quad (1)$$

$$E_y^{II}(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{D}\right)e(-\gamma_n z),\ z > 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{H} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -i\omega\mu_0\vec{H} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_x \quad (3)$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΠΛΑΚΩΝ (16)

$$(3)\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Longrightarrow}}\begin{cases} H_x^{I}(x,z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\gamma_n}{i\omega\mu_0}\right)A_n\sin\left(\dfrac{n\pi x}{D}\right)e^{+\gamma_n z},\ z<0 & (4)\\ H_x^{II}(x,z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{-\gamma_n}{i\omega\mu_0}\right)A_n\sin\left(\dfrac{n\pi x}{D}\right)e^{-\gamma_n z},\ z>0 & (5)\end{cases}$$

$$z=0 \quad \hat{z}\times\left(\vec{E}_y^{II}-\vec{E}_y^{I}\right)=0\Rightarrow E_y^{II}\left(x,0\right)=E_y^{I}\left(x,0\right) \quad (6)$$

$$\hat{z}\times\left(\vec{H}^{II}-\vec{H}^{I}\right)=\vec{J}\Rightarrow H_x^{II}-H_x^{I}=J_0\left(x\right) \quad (7)$$

$$\left(6\right)\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Longrightarrow}}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{D}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{D}\right)\Rightarrow A_n=B_n$$

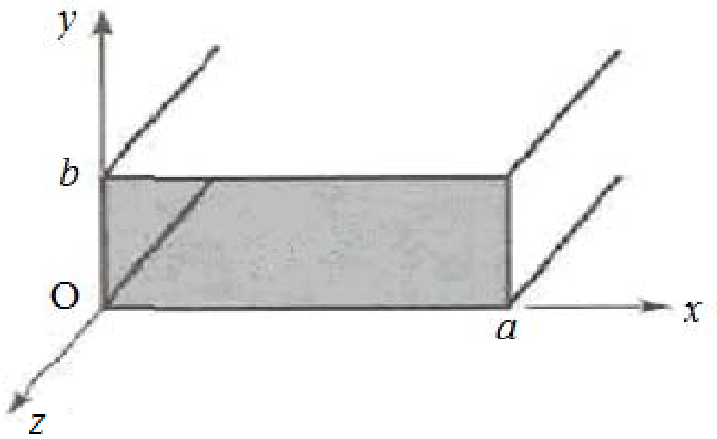
$$\left(7\right)\underset{(5)}{\overset{(4)}{\Longrightarrow}}J_0\left(x\right)=-\frac{2}{i\omega\mu_0}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\gamma_n\sin\left(\frac{n\pi x}{D}\right)\Rightarrow$$

$$A_n=-\frac{i\omega\mu_0}{2\gamma_n D}\int_0^D J_0(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{D}\right)dx$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (1)

$$\vec{E}\left(x,y,z\right)=\vec{e}\left(x,y\right)\exp(-\gamma z) \quad \vec{H}\left(x,y,z\right)=\vec{h}\left(x,y\right)\exp(-\gamma z)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-i\omega\mu_0\vec{H}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}-i\omega\mu_0 h_x &= \frac{\partial e_z}{\partial y}+\gamma e_y && (1.4\text{a})\\ -i\omega\mu_0 h_y &= -\left(\frac{\partial e_z}{\partial x}+\gamma e_x\right) && (1.4\text{b})\\ -i\omega\mu_0 h_z &= \frac{\partial e_y}{\partial x}-\frac{\partial e_x}{\partial y} && (1.4\text{c})\end{aligned}\right\}$$



$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=i\omega\varepsilon_0\vec{E}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}i\omega\varepsilon_0 e_x &= \frac{\partial h_z}{\partial y}+\gamma h_y && (1.4\text{d})\\ i\omega\varepsilon_0 e_y &= -\left(\frac{\partial h_z}{\partial x}+\gamma h_x\right) && (1.4\text{e})\\ i\omega\varepsilon_0 e_z &= \frac{\partial h_y}{\partial x}-\frac{\partial h_x}{\partial y} && (1.4\text{f})\end{aligned}\right\}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (2)

$$(1.4\mathrm{e}) \overset{(1.4\mathrm{a})}{\Rightarrow} i\omega\varepsilon_0 e_y = -\frac{\partial h_z}{\partial x} + \frac{\gamma}{i\omega\mu_0}\left(\frac{\partial e_z}{\partial y} + \gamma e_y\right) \Rightarrow$$

$$\left[\gamma^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right] e_y = -\gamma \frac{\partial e_z}{\partial y} + i\omega\mu_0 \frac{\partial h_z}{\partial x}, \quad \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \equiv k_\perp^2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$e_y(x,y) = \frac{1}{k_\perp^2}\left[-\gamma \frac{\partial e_z}{\partial y} + i\omega\mu_0 \frac{\partial h_z}{\partial x}\right] \quad (1.5)$$

$$e_x(x,y) = \frac{1}{k_\perp^2}\left[-\gamma \frac{\partial e_z}{\partial x} - i\omega\mu_0 \frac{\partial h_z}{\partial y}\right] \quad (1.6)$$

Υπέρθεση TE και TM κυμάτων

$$h_x(x,y) = \frac{1}{k_\perp^2}\left[i\omega\varepsilon_0 \frac{\partial e_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial h_z}{\partial x}\right] \quad (1.7)$$

$$h_y(x,y) = \frac{1}{k_\perp^2}\left[-i\omega\varepsilon_0 \frac{\partial e_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial h_z}{\partial y}\right] \quad (1.8)$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (3)

$$(1.4\mathrm{c}),(1.4\mathrm{f}) \underset{(1.7),(1.8)}{\overset{(1.5),(1.6)}{\Longrightarrow}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_\perp^2\right)\begin{pmatrix} e_z \\ h_z \end{pmatrix}=0$$

Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών: $\Phi(x,y)=X(x)Y(y)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_\perp^2\right)\Phi(x,y)=0\ \forall(x,y)\in S$$

$$\Rightarrow Y(y)X''(x)+Y''(y)X(x)+k_\perp^2 X(x)Y(y)=0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+k_\perp^2=0 \quad \forall(x,y)\in S$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-k_x^2 \Rightarrow X(x)=A_x\cos(k_x x)+B_x\sin(k_x x)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-k_y^2 \Rightarrow Y(y)=A_y\cos(k_y y)+B_y\sin(k_y y)$$

k_x^2, k_y^2: σταθερές, $k_x^2+k_y^2=k_\perp^2=\gamma^2+(\omega/c)^2\neq 0$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (4)

Κύματα TE

$$e_z = 0,\ h_z \neq 0 \Rightarrow \Rightarrow e_y \propto \frac{\partial h_z}{\partial x} = X'(x)Y(y) \text{ και } e_x \propto \frac{\partial h_z}{\partial y} = X(x)Y'(y)$$

Οριακές Συνθήκες:

$$\left.\begin{aligned} e_x(x,0) &= 0 \\ e_x(x,b) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ και } \left.\begin{aligned} e_y(0,y) &= 0 \\ e_y(a,y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$e_x(x,0) = 0 \Rightarrow X(x)Y'(0) = 0 \ \ \forall x \Rightarrow Y'(0) = 0 \Rightarrow B_y = 0$$

$$e_x(x,b) = 0 \Rightarrow Y'(b) = 0 \Rightarrow -k_y B_y \sin(k_y b) = 0 \Rightarrow k_y b = n\pi,\ n = 0,1,2,\ldots$$

$$e_y(0,y) = 0 \Rightarrow X'(0)Y(y) = 0 \ \ \forall y \Rightarrow X'(0) = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

$$e_y(a,y) = 0 \Rightarrow X'(a) = 0 \Rightarrow \sin(k_x a) = 0 \Rightarrow k_x a = m\pi,\ m = 0,1,2,\ldots$$

$$\boxed{\mathbf{m + n \neq 0}}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (5)

I) $\gamma_{mn} = 0 \Rightarrow \omega_{mn} = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ ή $f_{mn} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$

II) $\gamma_{mn}^2 > 0 \Rightarrow \omega < \omega_{mn}$ απόσβεση $(e^{-a_{mn}z})$, $a_{mn} = \sqrt{\frac{\omega_{mn}^2 - \omega^2}{c^2}}$

III) $\gamma_{mn}^2 < 0 \Rightarrow \omega > \omega_{mn}$ διάδοση $(e^{-i\beta_{mn}z})$, $\beta_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{mn}^2}{c^2}}$,

$\omega^2 = \omega_{mn}^2 + c^2\beta_{mn}^2$

Για $b < a < 2b$: $f_{10} = \frac{c}{2a}$, $f_{01} = \frac{c}{2b}$, $f_{20} = \frac{c}{a} \Rightarrow f_{10} < f_{01} < f_{20}$,

δηλ. πρώτος ρυθμός ο TE_{10}

Αν $f < f_{10}$, το κύμα σβήνει εκθετικά κατά μήκος του άξονα διάδοσης και μετά από μερικά cm δεν υπάρχει.

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (6)

Κύματα ΤΜ

$$h_z = 0, \quad e_z(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0$$

Οριακές συνθήκες:

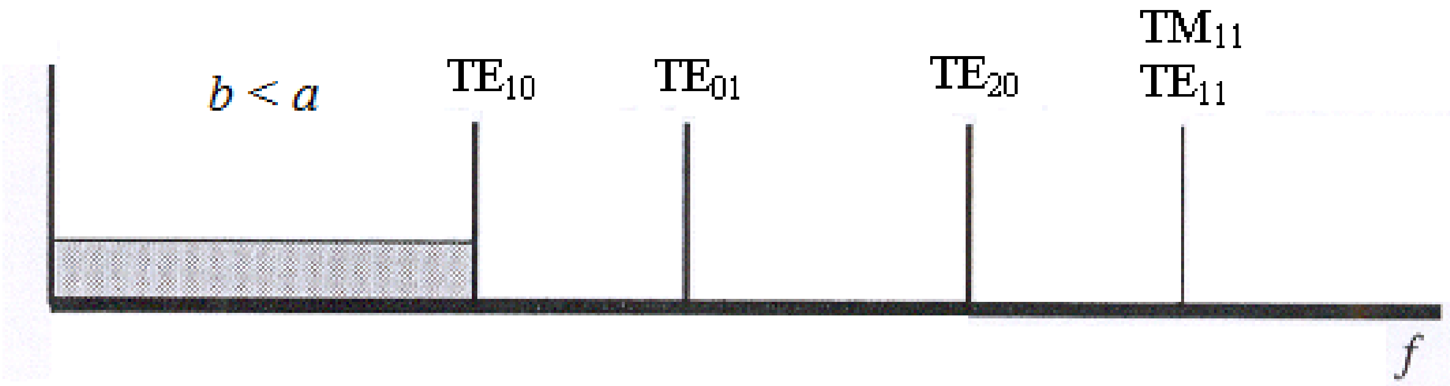
$$e_z\left(x,0\right) = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

$$e_z\left(0,y\right) = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$e_z\left(x,b\right) = 0 \Rightarrow k_y b = n\pi,\ n = 1,2,\ldots$$

$$e_z\left(a,y\right) = 0 \Rightarrow k_x a = m\pi,\ m = 1,2,\ldots$$

$\boxed{\boldsymbol{m \cdot n \neq 0}}$



ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (7)

Ρυθμός TE_{10}

$$H_z(x,z) = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta_{10} z}$$

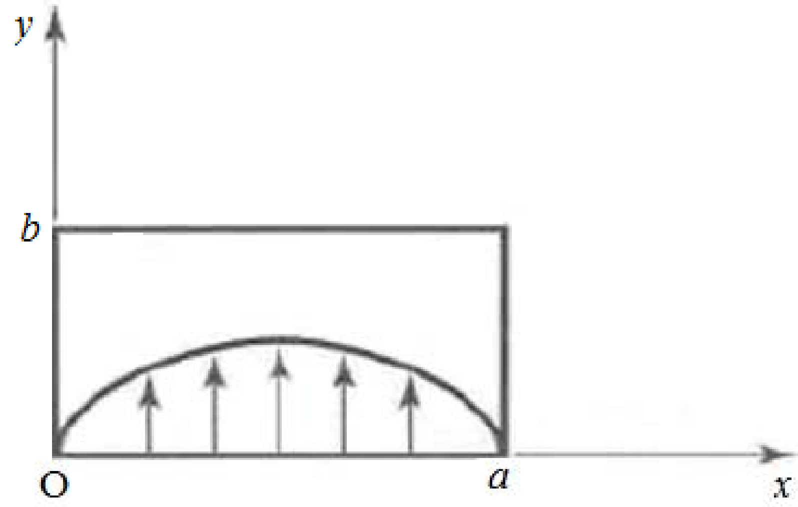
$$E_y(x,z) = -\frac{i\omega\mu_0 \alpha}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta_{10} z}$$

$$H_x(x,z) = \frac{i\beta_{10} a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta_{10} z}$$

$$E_x = E_z = H_y = 0$$

$$k_x = \frac{\pi}{a}, \quad k_y = 0$$

$$\beta_{10} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}, \quad Z_{TE_{10}} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu_0}{\beta_{10}}$$



ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (8)

Ισχύς που μεταφέρεται από τον κυματοδηγό:

$$\vec{P}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{y}E_y \times \left(\hat{x}H_x^* + \hat{z}H_z^*\right)\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{-\hat{z}E_y H_x^* + \hat{x}E_y H_z^*\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{-\hat{z}E_y \frac{-E_y^*}{Z_{TE_{10}}}\right\} = \hat{z}\frac{\left|E_y\right|^2}{2Z_{TE_{10}}}\left(\frac{W}{m^2}\right)$$

$$P_{o\lambda} = \frac{\omega^2\mu_0^2 a^2}{2\pi^2 Z_{TE_{10}}}\left|H_0\right|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx\int_0^b dy = \frac{\omega^2\mu_0^2 a^3 b}{4\pi Z_{TE_{10}}}\left|H_0\right|^2$$

Εξασθένιση από την πεπερασμένη αγωγιμότητα των τοιχωμάτων:

$$P_\sigma = \frac{1}{2\sigma\delta_s}\int\left|\vec{K}_S\right|^2 d\vec{l}$$

$$\vec{K}_S\left(x=0\right) = \hat{x}\times\vec{H}\left(x=0,y,z\right) = \hat{x}\times\hat{z}H_0\cos\left(\frac{\pi}{a}0\right)e^{-i\beta_{10}z} = -\hat{y}H_0 e^{-i\beta_{10}z}$$

$$\vec{K}_S\left(x=a\right) = -\hat{x}\times\vec{H}\left(x=\alpha,y,z\right) = -\hat{x}\times\hat{z}H_0\cos\left(\pi\right)e^{-i\beta_{10}z} = -\hat{y}H_0 e^{-i\beta_{10}z}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (9)

$$\vec{K}_S\left(y=0\right)=\hat{y}\times\vec{H}\left(x,y=0\right)=-\hat{z}H_x\left(x,0\right)+\hat{x}H_z\left(x,0\right)$$

$$\Rightarrow \vec{K}_S\left(y=0\right)=-\hat{z}\frac{i\beta_{10}a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\beta_{10}z}+\hat{x}H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\beta_{10}z}$$

$$\vec{K}_S\left(y=b\right)=-\hat{y}\times\vec{H}\left(x,b\right)=\hat{z}H_x\left(x,b\right)-\hat{x}H_z\left(x,b\right)$$

$$\Rightarrow \vec{K}_S\left(y=b\right)=\hat{z}\frac{i\beta_{10}a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\beta_{10}z}-\hat{x}H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\beta_{10}z}$$

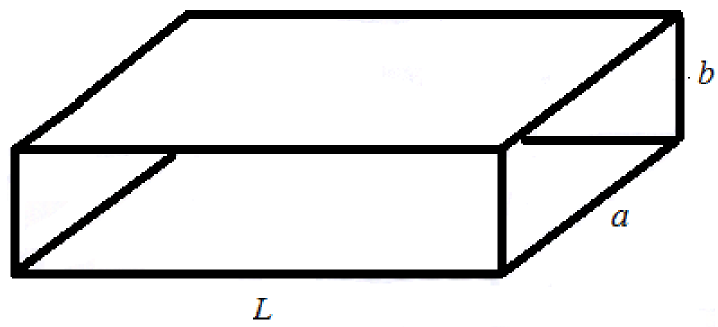
$$P_\sigma=\frac{1}{2\sigma\delta_s}\int\left|\vec{K}_S\right|^2 dl=\frac{1}{2\sigma\delta_s}2\left[\int_0^\alpha dx\left|\vec{K}_S\left(y=0\right)\right|^2+\int_0^b dy\left|\vec{K}_S\left(x=0\right)\right|^2\right]$$

$$\Rightarrow P_\sigma=\frac{1}{\sigma\delta_s}\left|H_0\right|^2\left(b+\frac{a}{2}+\frac{\beta^2a^3}{2\pi^2}\right)\left(\frac{W}{m}\right)$$

$$a=\frac{\pi Z_{TE_{10}}\left(2b+a+\frac{\beta^2a^3}{\pi^2}\right)}{\omega^2\mu_0^2a^3b\sigma\delta_s}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (10)

Σε κοιλότητα ορθογωνικής διατομής με εγκάρσιες διαστάσεις a και b και διαμήκη L διαδίδεται ο ρυθμός TE$_{10}$. Να βρείτε τις συχνότητες που μπορούν να υπάρξουν στην κοιλότητα.



$$E_y(x,z) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[Ae^{-i\beta_{10}z} + Be^{+i\beta_{10}z}\right]$$

$$E_y(x,z=0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

$$E_y(x,z=L) = 0 \Rightarrow Ae^{-i\beta_{10}L} + Be^{+i\beta_{10}L} = 0$$

$$\sin(\beta_{10}L) = 0 \Rightarrow \beta_{10}L = \ell\pi, \ell = 1,2,...,$$

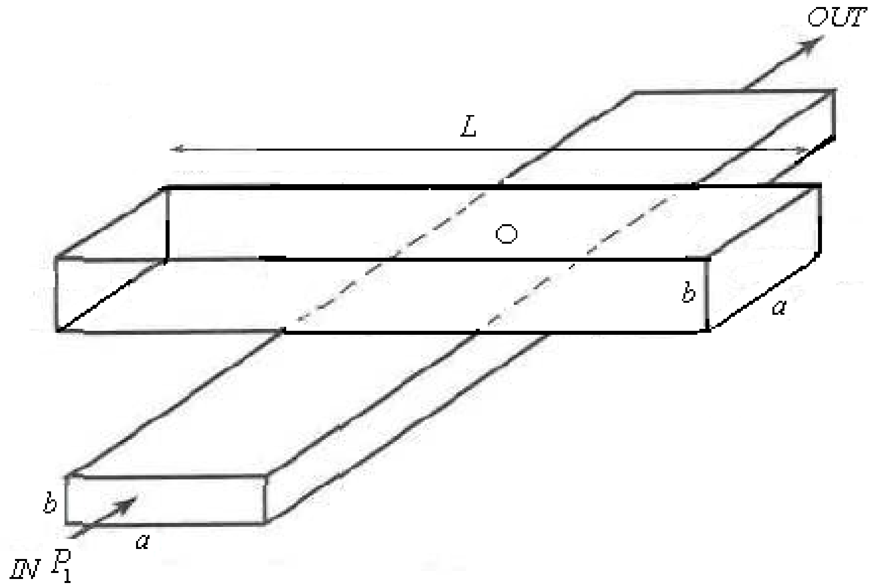
$$\beta_{10}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\omega_{10\ell}}{c}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{L}\right)^2$$

Για τον TE$_{mn}$ $$\left(\frac{\omega_{mn\ell}}{c}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{L}\right)^2$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (11)

Μέτρηση συχνότητας

Μεταβάλλοντας το μήκος L της κοιλότητας, παρατηρούμε ότι η ισχύς εξόδου για κάποια τιμή του L μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε κατανάλωση ισχύος στην κοιλότητα (δηλ. συντονισμό) και επομένως η συχνότητα λειτουργίας ισούται με τη συχνότητα συντονισμού αυτής:

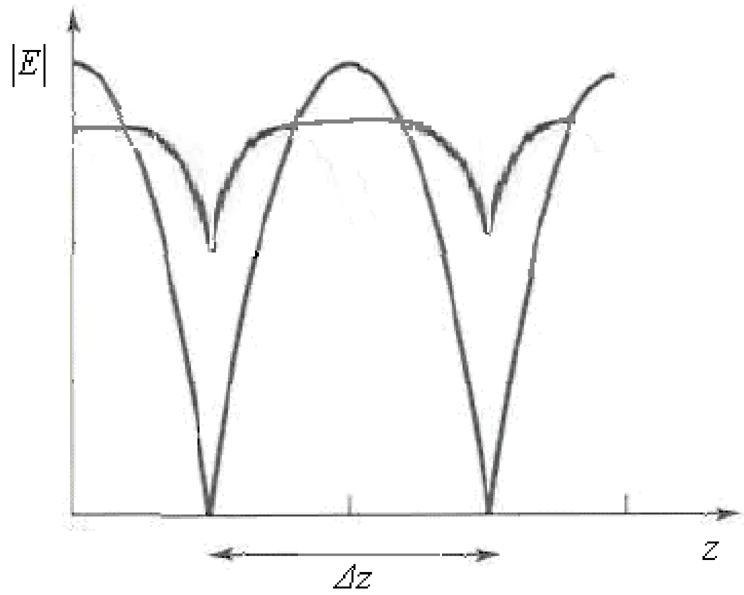


$$\omega_{10\ell} = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{L}\right)^2}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (12)

Μέτρηση μήκους κύματος

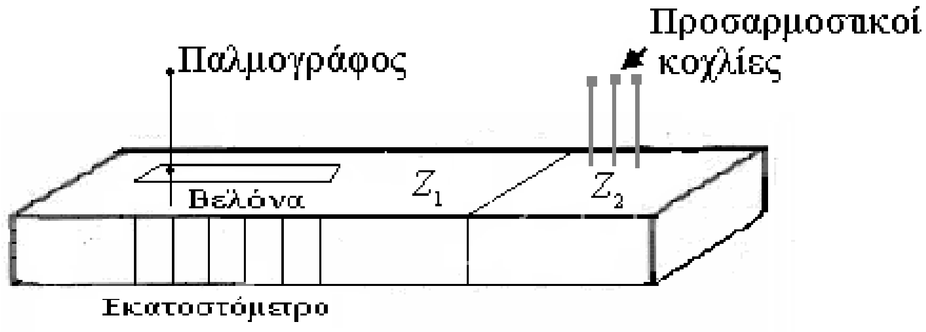
Σε κυματοδηγό τοποθετούμε μια κεραία έτσι ώστε να διαδίδεται μόνο ο ρυθμός TE_{10} και δημιουργούμε ανακλάσεις μέσα στον κυματοδηγό (στάσιμα κύματα). Αν η απόσταση δύο διαδοχικών ελαχίστων είναι Δz, τότε ισχύει:



$$\sin\left(\beta \Delta z\right) = 0 \Rightarrow \beta \Delta z = \pi \Rightarrow$$

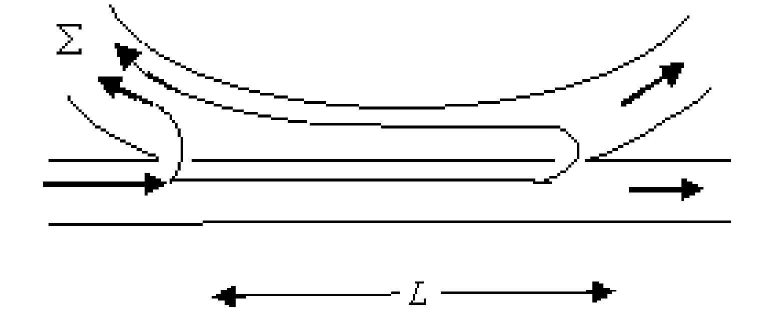
$$\Delta z = \frac{\pi}{\beta_{10}} = \frac{\lambda_{g_{10}}}{2}$$

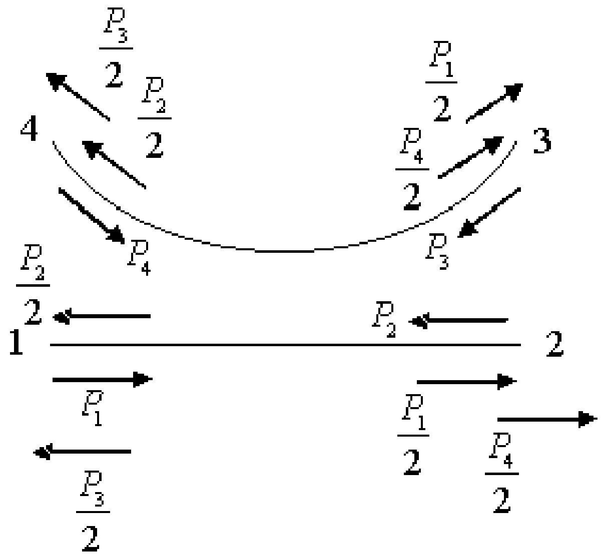
$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{g_{10}}}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{2\alpha}\right)^2$$



ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (13)

Κατευθυντικός συζεύκτης





Για να αλληλοαναιρούνται τα κύματα που φτάνουν στο Σ πρέπει:

$$2\beta L = \pi \Rightarrow L = \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\lambda_g}{4}$$

$$\text{Προσαρμογή \#4 } (P_4 = 0) \Rightarrow Q_3 = \frac{P_1}{2}$$

$$\text{Προσαρμογή \#3 } (P_3 = 0) \Rightarrow Q_4 = \frac{P_2}{2}$$

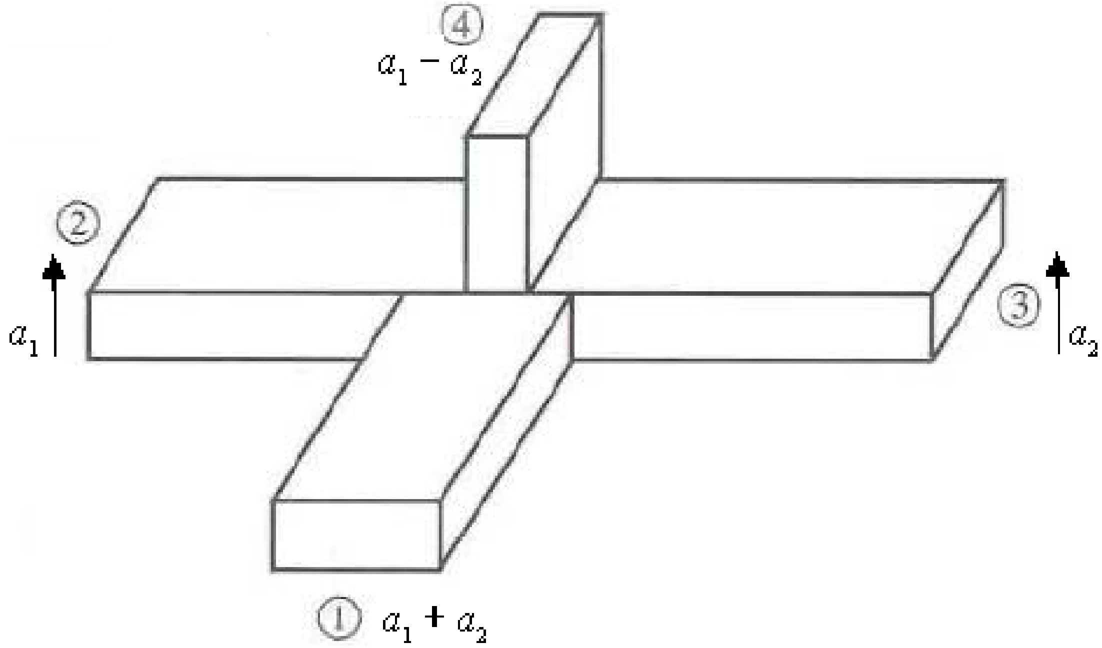
$$P_{\pi\rho o\sigma\pi \acute{\iota}\pi\tau o\upsilon\sigma\alpha,2} = \frac{P_1}{2} = Q_3$$

$$P_{\alpha\nu\alpha\kappa\lambda\acute{\omega}\mu\varepsilon\nu\eta,2} = P_2 = 2Q_4$$

$$\left|\rho_2\right|^2 = \frac{P_{\alpha\nu,2}}{P_{\pi\rho,2}} = \frac{2Q_4}{Q_3}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (14)

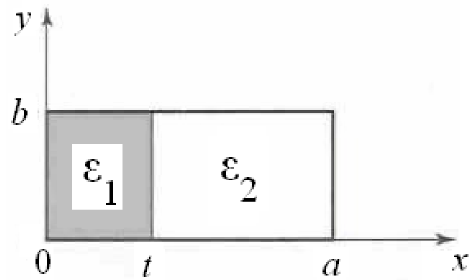
Μαγικό Τ



Εισάγοντας δύο κύματα α_1 και α_2 στις θύρες #1 και #2, αντίστοιχα, τότε στην μία έξοδο παίρνουμε το άθροισμα αυτών και στην άλλη τη διαφορά τους.

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (15)

Άσκηση 2. Σε κυματοδηγό ορθογωνικής διατομής με διαστάσεις α και b, οι περιοχές $0 < x < t$ και $t < x < a$ περιέχουν υλικά σχετικής διηλεκτρικής σταθερά ε_1 και ε_2, αντίστοιχα. Να βρεθούν κύματα TE με ανεξαρτησία από το y, που μπορούν να διαδοθούν στον κυματοδηγό καθώς και η συχνότητα αποκοπής του ρυθμού TE_1.



Λύση

Οι διαμήκεις κυματαριθμοί των περιοχών I και II πρέπει να είναι ίδιοι, δηλ. $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Για κύματα TE ισχύει: $H_z\left(x,z\right) = f(x)\exp(-\gamma z)$, οπότε η κυματική εξίσωση στη γενική μορφή γράφεται:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon\right) H_z\left(x,z\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_i\right] f_i\left(x\right) = 0, \quad i = 1,2$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (16)

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+h_i^2\right)f_i\left(x\right)=0,\quad h_i^2=\gamma^2+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_\iota>0\Rightarrow$$

$$f_i\left(x\right)=A_i\sin\left(h_ix\right)+B_i\cos\left(h_ix\right),\ i=1,2\Rightarrow$$

$$H_z^I\left(x,z\right)=\left[A_1\sin\left(h_1x\right)+B_1\cos\left(h_1x\right)\right]\exp(-\gamma z)$$

$$H_z^{II}\left(x,z\right)=\left[A_2\sin\left(h_2x\right)+B_2\cos\left(h_2x\right)\right]\exp(-\gamma z)$$

$$E_x\propto\left(\frac{\partial E_z}{\partial x},\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)=0,\quad E_y\propto\left(\frac{\partial E_z}{\partial y},\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\neq 0$$

$$E_y^I\left(x,z\right)=\frac{i\omega\mu_0}{h_1}\left[A_1\cos\left(h_1x\right)-B_1\sin\left(h_1x\right)\right]\exp(-\gamma z)$$

$$E_y^{II}\left(x,z\right)=\frac{i\omega\mu_0}{h_2}\left[A_2\cos\left(h_2x\right)-B_2\sin\left(h_2x\right)\right]\exp(-\gamma z)$$

$$H_x\neq 0\,,H_y=0$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (17)

Οριακές συνθήκες: $E_y^I(x=0)=0 \qquad (1)$

$$E_y^{II}(x=a)=0 \qquad (2)$$

$$E_y^I(x=t)=E_y^{II}(x=t) \qquad (3)$$

$$H_z^I(x=t)=H_z^{II}(x=t) \qquad (4)$$

$$(1)\Rightarrow A_1=0$$

$$(2)\Rightarrow A_2\cos(h_2a)-B_2\sin(h_2a)=0$$

$$(4)\Rightarrow B_1\cos(h_1t)=A_2\sin(h_2t)+B_2\cos(h_2t) \qquad (5)$$

$$(3)\Rightarrow \frac{-i\omega\mu_0}{h_1}B_1\sin(h_1t)=\frac{i\omega\mu_0}{h_2}\left[A_2\cos(h_2t)-B_2\sin(h_2t)\right] \qquad (6)$$

$$\frac{(6)}{(5)}\Rightarrow \frac{-1}{h_1}\tan(h_1t)=\frac{1}{h_2}\frac{A_2\cos(h_2t)-B_2\sin(h_2t)}{A_2\sin(h_2t)+B_2\cos(h_2t)}$$

ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (18)

$$\Rightarrow \frac{-1}{h_1}\tan\left(h_1 t\right) = \frac{1}{h_2}\frac{\dfrac{B_2}{\cos\left(h_2 a\right)}\sin\left(h_2 a\right)\cos\left(h_2 t\right) - B_2\sin\left(h_2 t\right)}{\dfrac{B_2}{\cos\left(h_2 a\right)}\sin\left(h_2 a\right)\sin\left(h_2 t\right) + B_2\cos\left(h_2 t\right)}$$

$$= \frac{1}{h_2}\frac{\sin\left[h_2\left(a-t\right)\right]}{\cos\left[h_2\left(a-t\right)\right]} \Rightarrow \frac{1}{h_1}\tan\left(h_1 t\right) = -\frac{1}{h_2}\tan\left[h_2\left(a-t\right)\right]$$

Για $t = 0 \Rightarrow 0 = \tan\left(h_2 a\right) \Rightarrow \sin\left(h_2 a\right) = 0 \Rightarrow h_2 a = m\pi$

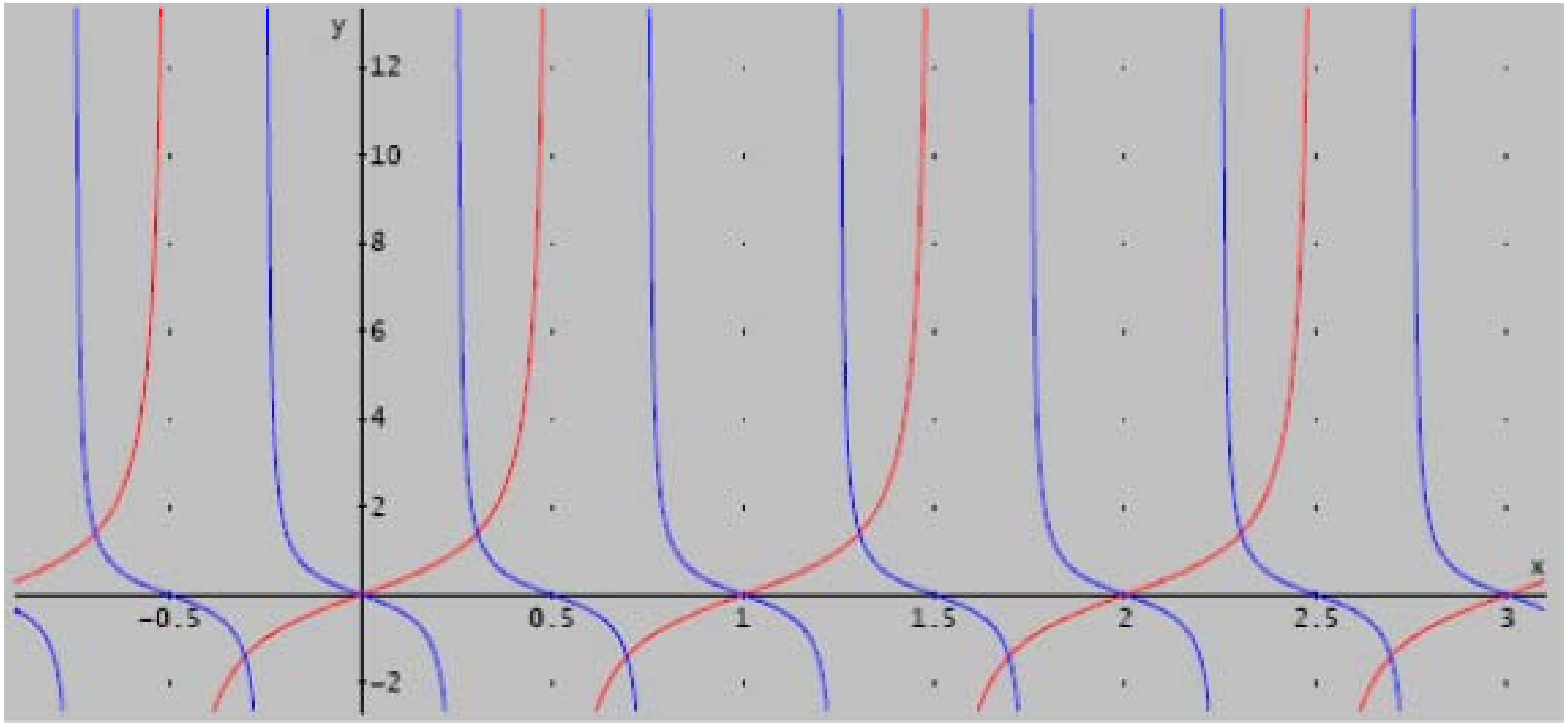
Για $t = \alpha \Rightarrow \tan\left(h_1 a\right) = 0 \Rightarrow h_1 a = m\pi$

Για τη συχνότητα αποκοπής ισχύει:

$\gamma = 0 \Rightarrow h_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1}/c, \;\; h_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2}/c$

$$\frac{1}{(\omega\sqrt{\varepsilon_1}/c)}\tan\left(\frac{\omega a\sqrt{\varepsilon_1}}{2c}\right) = -\frac{1}{(\omega\sqrt{\varepsilon_2}/c)}\tan\left(\frac{\omega a\sqrt{\varepsilon_2}}{2c}\right)$$

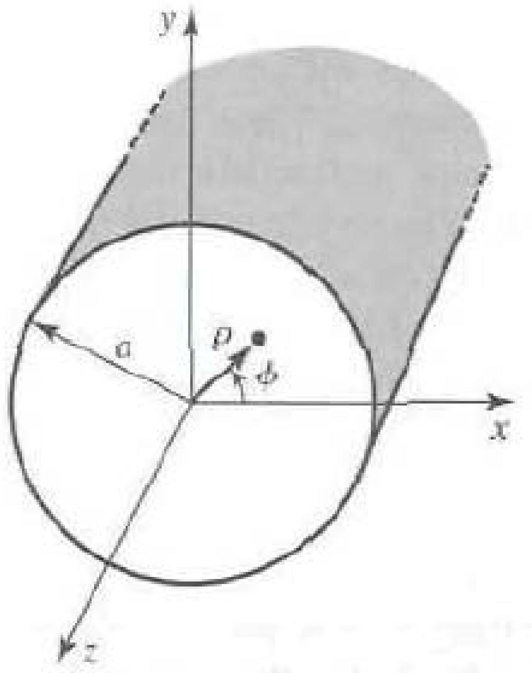
ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ (19)



$$\text{Για } \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 4, t = (a/2) \Rightarrow \tan\left(\frac{\omega a}{2c}\right) = -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\omega a}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \tan(x\pi) = -\frac{1}{2}\tan(2x\pi) \Rightarrow x = \frac{\omega a}{2\pi c} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ (1)



$$\vec{E}\left(\rho,\phi,z\right)=\vec{e}\left(\rho,\phi\right)e^{-\gamma z}$$

$$\vec{H}\left(\rho,\phi,z\right)=\vec{h}\left(\rho,\phi\right)e^{-\gamma z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-i\omega\mu_0\vec{H}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=i\omega\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial e_z}{\partial\phi}+\gamma\rho e_\phi\right)=-i\omega\mu_0 h_\rho & (1.9\text{a}) \\
\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial h_z}{\partial\phi}+\gamma\rho h_\phi\right)=i\omega\varepsilon_0 e_\rho & (1.9\text{b}) \\
-\gamma e_\rho-\dfrac{\partial e_z}{\partial\rho}=-i\omega\mu_0 h_\phi & (1.9\text{c}) \\
-\gamma h_\rho-\dfrac{\partial h_z}{\partial\rho}=i\omega\varepsilon_0 e_\phi & (1.9\text{d}) \\
\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\left(\rho e_\phi\right)}{\partial\rho}-\dfrac{\partial e_\rho}{\partial\phi}\right)=-i\omega\mu_0 h_z & (1.9\text{e}) \\
\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\left(\rho h_\phi\right)}{\partial\rho}-\dfrac{\partial h_\rho}{\partial\phi}\right)=i\omega\varepsilon_0 e_z & (1.9\text{f})
\end{array}\right\}$$

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ (2)

$$(1.9\text{c}) \overset{(1.9\text{b})}{\Rightarrow} \frac{1}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial \phi} + \gamma \frac{1}{i\omega\mu_0}\left(\gamma e_\rho + \frac{\partial e_z}{\partial \rho}\right) = i\omega\varepsilon_0 e_\rho \Rightarrow$$

$$\frac{i\omega\mu_0}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial \phi} + \gamma^2 e_\rho + \gamma\frac{\partial e_z}{\partial \rho} = -\omega^2\varepsilon_0\mu_0 e_\rho \Rightarrow -k_\perp^2 e_\rho = \gamma\frac{\partial e_z}{\partial \rho} + \frac{i\omega\mu_0}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial \phi}$$

$$e_\rho = \frac{-1}{k_\perp^2}\left(\gamma\frac{\partial e_z}{\partial \rho} + \frac{i\omega\mu_0}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial \phi}\right), \qquad e_\phi = \frac{-1}{k_\perp^2}\left(\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial e_z}{\partial \phi} - i\omega\mu_0\frac{\partial h_z}{\partial \rho}\right)$$

$$h_\rho = \frac{-1}{k_\perp^2}\left(-\frac{i\omega\varepsilon_0}{\rho}\frac{\partial e_z}{\partial \phi} + \gamma\frac{\partial h_z}{\partial \rho}\right), \quad h_\phi = \frac{-1}{k_\perp^2}\left(i\omega\varepsilon_0\frac{\partial e_z}{\partial \rho} + \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial \phi}\right)$$

$$k_\perp^2 = \left(\gamma^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)$$

$$\left[\nabla_{\rho,\phi}^2 + k_\perp^2\right]\begin{bmatrix} e_z(\rho,\phi) \\ h_z(\rho,\phi)\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ (3)

$$\left(\nabla^2_{\rho,\phi} + k_\perp^2\right) F\left(\rho,\phi\right) = 0 \Rightarrow F\left(\rho,\phi\right) = R\left(\rho\right) e^{\pm im\phi} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(im\right)^2 R + k_\perp^2 R = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + \left[k_\perp^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right] R = 0,\ 0 < \rho < \infty$$

I) $k_\perp^2 > 0:\ R\left(\rho\right) = AJ_m\left(k_\perp\rho\right) + BY_m\left(k_\perp\rho\right),$

λύσεις Bessel και Neumann πρώτου και δευτέρου είδους.

II) $k_\perp^2 = -\xi^2 < 0$: $R\left(\rho\right) = A'I_m\left(\xi\rho\right) + B'K_m\left(\xi\rho\right),$

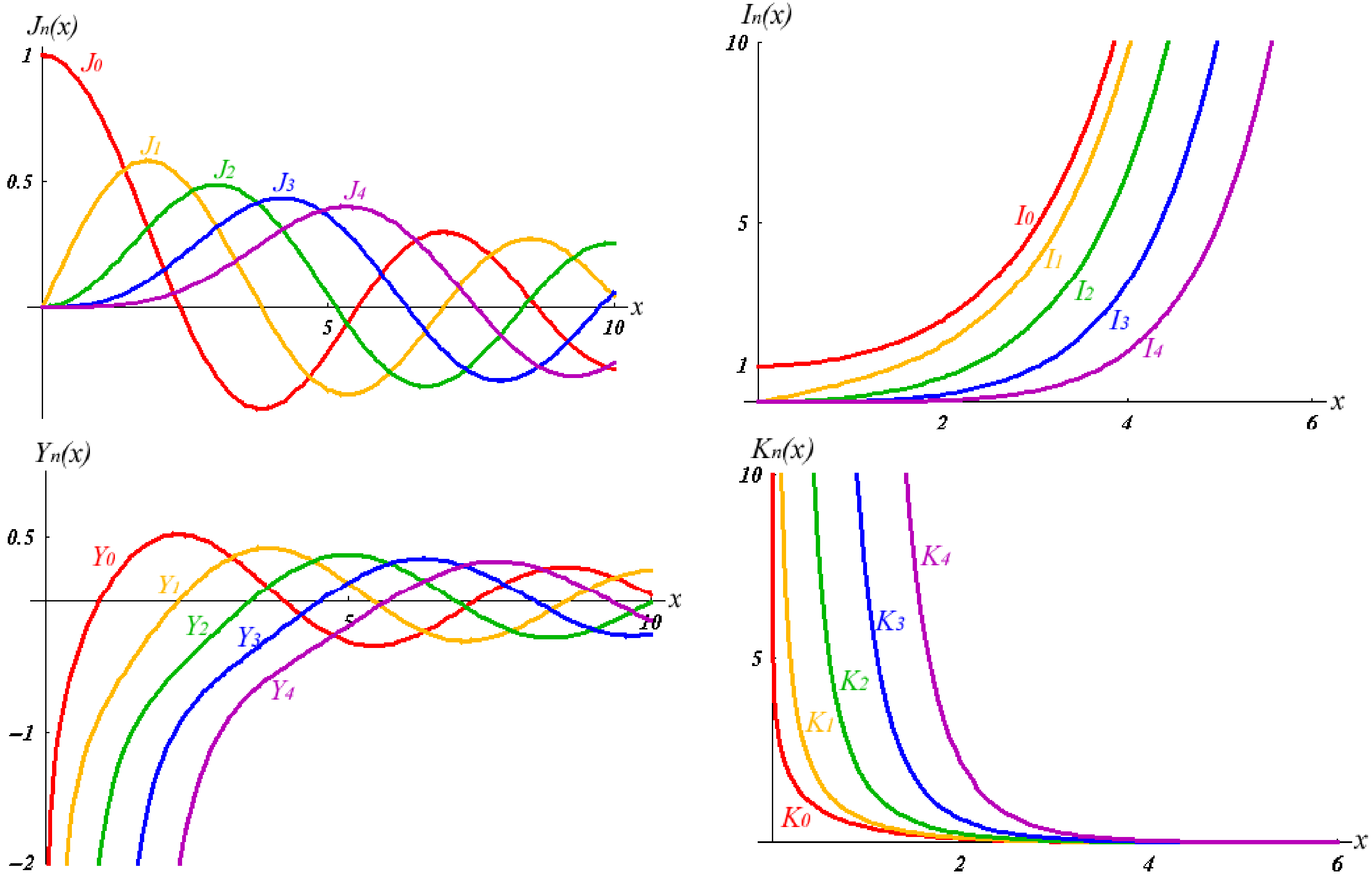
τροποποιημένες Bessel πρώτου και δευτέρου είδους.

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ (4)

I) Για $\rho \to 0$ $Y_m \to -\infty,$ και για να μην απειρίζεται το πεδίο πρέπει $B = 0$.

II) Για $\rho \to 0$ $K_m \to +\infty,$ και για να μην απειρίζεται το πεδίο πρέπει $B' = 0$.

III) Για $\rho \to \infty$ $I_m \to +\infty,$ και για να μην απειρίζεται το πεδίο πρέπει $A' = 0$.



ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ (5)

Κύματα TM

$$e_z\left(\rho,\phi\right)=J_m\left(k_\perp\rho\right)\left[a_m\cos\left(m\phi\right)+b_m\sin\left(m\phi\right)\right]$$

Οριακή συνθήκη: $e_z\left(a,\phi\right)=0\Rightarrow J_m\left(k_\perp a\right)=0$

Πίνακας 1.1: Ρίζες της εξίσωσης $J_m\left(k_\perp a\right)=0$

m/n	1	2	3
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.173
2	5.136	8.417	11.620

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ (6)

Κύματα TE

$$h_z(\rho,\phi) = J_m(k_\perp \rho)\left[a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)\right]$$

Οριακή συνθήκη: $e_\phi(a,\phi) = 0 \Rightarrow e_\phi \propto \dfrac{\partial h_z}{\partial \rho} \Rightarrow J'_m(k_\perp \alpha) = 0$

Πίνακας 1.2: Ρίζες της εξίσωσης $J'_m(k_\perp \alpha) = 0$

m/n	1	2	3
0	3.832	7.016	10.173
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.969

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ (7)

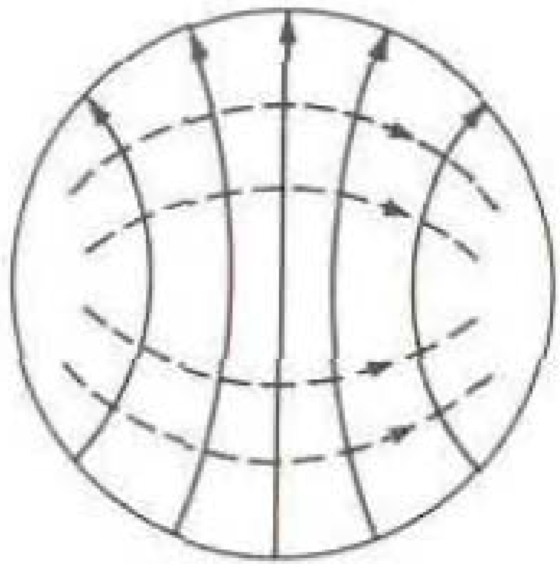
Ρυθμός TE_{11}

$$h_z = J_1\left(k_{\perp 1}\rho\right)\left[a\cos\phi + b\sin\phi\right]$$

$$e_\rho = -\frac{1}{k_{\perp 1}^2}\frac{i\omega\mu_0}{\rho}J_1\left(k_{\perp 1}\rho\right)\left[-a\sin\phi + b\cos\phi\right]$$

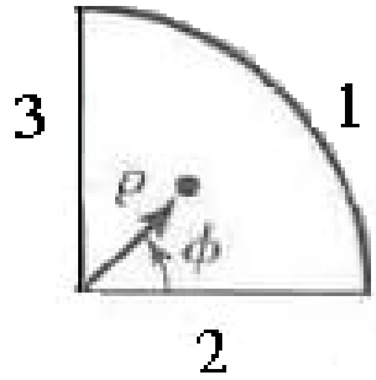
$$e_\phi = -\frac{1}{k_{\perp 1}}\left(-i\omega\mu_0\right)J_1'\left(k_{\perp 1}\rho\right)\left[a\cos\phi + b\sin\phi\right]$$

$$k_{\perp 1}a = 1.841$$



Εκφυλισμός πρώτης τάξης, δηλ. δύο ρυθμοί με κάθετες μεταξύ τους πολώσεις

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ (8)



Κύματα TE σε κυματοδηγό κυκλικού τομέα 90°

$$H_z(\rho,\phi,z) = AJ_m(k_\perp \rho)\left[a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)\right]e^{-i\beta z}$$

Οριακές Συνθήκες

Επιφάνεια 1 ($\rho = a$): $E_\phi = 0 \Rightarrow J'_m(k_\perp a) = 0$

Επιφάνεια 2 ($\phi = 0$) : $E_\rho = 0 \Rightarrow E_\rho \propto \dfrac{\partial H_z}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow b_m = 0$

Επιφάνεια 3 ($\phi = \pi/2$) : $E_\rho = 0 \Rightarrow E_\rho \propto \dfrac{\partial H_z}{\partial \phi} = 0$

$$\Rightarrow -a_m \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) + b_m \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{m\pi}{2} = \ell\pi$$

$\Rightarrow m = 2\ell,\ \ell = 0,1,2,\ldots$ και $m = 0,2,4,\ldots$

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΣ (9)

Άσκηση 3. Έστω κυλινδρικός κυματοδηγός ακτίνας α στα τοιχώματα του οποίου ικανοποιείται η σχέση $E_z/H_\phi = -\zeta$ (σε Ω). Να βρεθεί η συνθήκη για τη διάδοση κυμάτων TM με ανεξαρτησία από το ϕ καθώς και η έκφραση του διανύσματος Poynting.

Λύση

$$E_z(\rho, z) = AJ_0(k_\perp \rho)e^{-i\beta z}$$

$$H_\phi = \frac{-i\omega\varepsilon_0}{k_\perp^2}\frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{k_\perp}AJ_0'(k_\perp \rho)e^{-i\beta z}$$

$$\frac{E_z}{H_\phi} = \frac{AJ_0(k_\perp a)}{-\dfrac{i\omega\varepsilon_0}{k_\perp}AJ_0'(k_\perp a)} = -\frac{k_\perp J_0(k_\perp a)}{i\omega\varepsilon_0 J_0'(k_\perp a)} = -\zeta \in I$$

$$\vec{P}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ E_\rho & 0 & E_z \\ 0 & H_\phi^* & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(-\hat{\rho}E_z H_\phi^* + \hat{z}E_\rho H_\phi^*\right)$$

ΚΥΜΑΤΑ TEM ($E_z = 0, H_z = 0$)

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -i\omega\mu_0 \vec{H} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

$$E_x\left(x,y,z\right) = e_x\left(x,y\right)e^{-\gamma z}, \quad E_y\left(x,y,z\right) = e_y\left(x,y\right)e^{-\gamma z}$$

$$\vec{e} = -\vec{\nabla}\Phi\left(x,y\right) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} e_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \\ e_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial e_x}{\partial y} = \frac{\partial e_y}{\partial x}$$

$$\nabla^2 \Phi\left(x,y\right) = 0$$

Για να υπάρξει ρυθμός TEM πρέπει να υπάρχει εσωτερικός αγωγός

ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ (1)

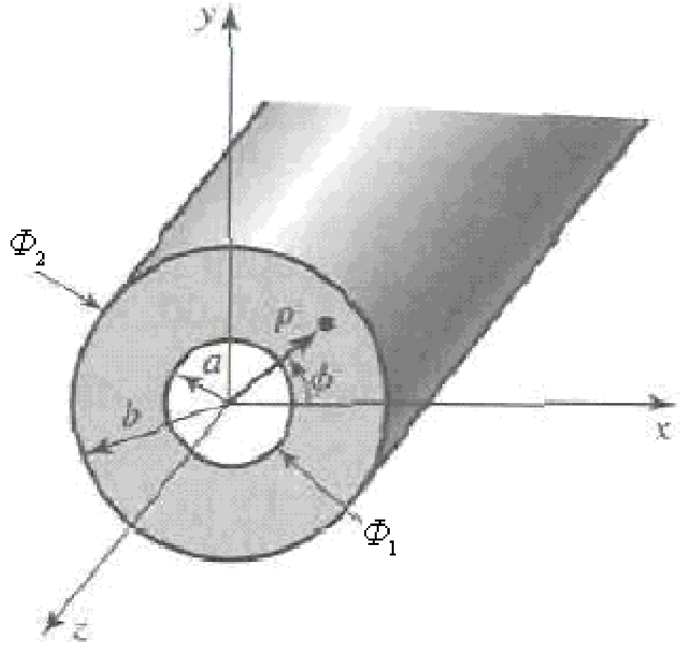
Κύματα TEM

$$\nabla^2 \Phi(\rho,\phi) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi(\rho) = A\ln\rho + B$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi(a) &= \Phi_1\\ \Phi(b) &= \Phi_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln a - \ln b} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln(a/b)}$$

$$B = \Phi_1 - \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln(a/b)}\ln a = \frac{\Phi_2 \ln a - \Phi_1 \ln b}{\ln(a/b)}$$



$$\Rightarrow \Phi(\rho) = \frac{V_0}{\ln(a/b)}\ln\rho + B\,,\; V_0 = \Phi_1 - \Phi_2$$

$$\vec{e}(\rho,\phi) = -\hat{\rho}\frac{1}{\rho}\frac{V_0}{\ln(a/b)} \Rightarrow \vec{E}(\rho,\phi,z) = -\hat{\rho}\frac{1}{\rho}\frac{V_0}{\ln(a/b)}e^{-\gamma z}$$

$$\vec{H}(\rho,\phi,z) = \vec{h}(\rho,\phi)e^{-\gamma z}, \quad \vec{h}(\rho,\phi) = \vec{h}(\rho) = \hat{\phi}h(\rho), \quad \gamma e_\rho = i\omega\mu_0 h_\phi$$

ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ (2)

$$\vec{H}\left(\rho,\phi,z\right)=-\hat{\phi}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\rho}\frac{V_0}{\ln\left(a/b\right)}e^{-\gamma z}\Rightarrow\frac{e_\rho}{h_\phi}=Z_{\mathrm{TEM}}=\frac{\omega\mu_0}{\beta}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\cong 120\pi$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο αγωγών:

$$V\left(z\right)=-\int_a^b\left(-E_\rho\right)d\rho=\frac{-V_0}{\ln\left(a/b\right)}e^{-\gamma z}\ln\rho\Big|_a^b=V_0e^{-\gamma z}$$

Το φορτίο ανά μονάδα μήκους στον εξωτερικό αγωγό:

$$Q\left(z\right)=2\pi\rho\varepsilon_0E_\rho\left(b,z\right)=-\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(a/b\right)}V_0e^{-\gamma z}$$

Η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους:

$$C=\left|\frac{Q}{V}\right|=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(a/b\right)}$$

Η ένταση του ρεύματος στον εξωτερικό αγωγό:

$$I\left(z\right)=\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=H_\phi 2\pi b=-\frac{2\pi}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}\frac{1}{\ln\left(a/b\right)}V_0e^{-\gamma z}$$

ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ (3)

$$LC=\varepsilon_0\mu_0 \Rightarrow L=\frac{\varepsilon_0\mu}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$v(z,t)=\mathrm{Re}\left\{V(z)e^{i\omega t}\right\}=V_0\cos(\omega t-\beta z)$$

$$i(z,t)=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}V_0\cos(\omega t-\beta z)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-V_0\sin(\omega t-\beta z)(-\beta)=\beta V_0\sin(\omega t-\beta z)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t}=\frac{2\pi V_0}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\ln(a/b)}(-\omega)\sin(\omega t-\beta z)$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\partial v/\partial z\right)}{\left(\partial i/\partial t\right)}=\frac{-\beta\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\ln(a/b)}{2\pi\omega}\Rightarrow\left(\partial v/\partial z\right)=-L\left(\partial i/\partial t\right)$$

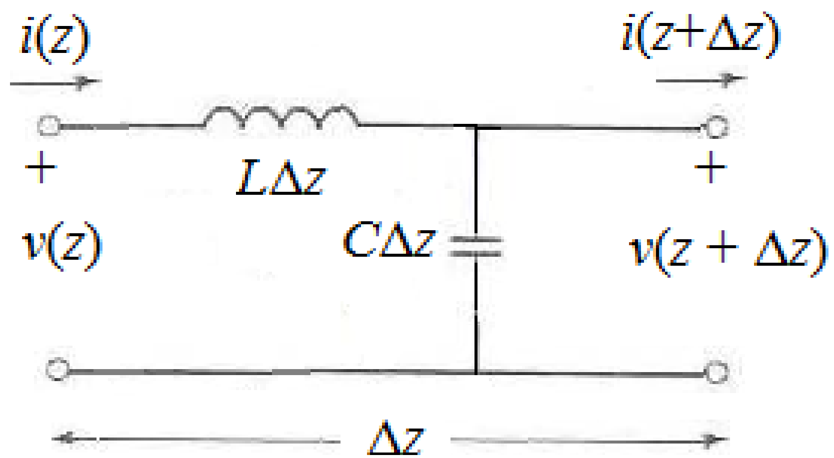
αφού $\beta=\dfrac{\omega}{c}=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ (4)

$$\Rightarrow -\frac{\partial v}{\partial z} = L\frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow -\frac{v(z+\Delta z)-v(z)}{\Delta z} = L\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow v(z)-v(z+\Delta z) = (L\Delta z)\frac{\partial i}{\partial t}$$

Αναλογα: $\frac{\partial i}{\partial z} = -c\frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow i(z)-i(z+\Delta z) = (C\Delta z)\frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow$



ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ (5)

Κύματα TE: $e_z = 0, \quad h_z\left(\rho,\phi\right) = e^{im\phi}\left[AJ_m\left(k_\perp\rho\right) + BY_m\left(k_\perp\rho\right)\right]$

Οριακές συνθήκες: $e_\phi \propto \left.\dfrac{\partial h_z}{\partial \rho} = 0\right|_{\rho=a,b}$

$AJ'_m\left(k_\perp a\right) + BY'_m\left(k_\perp a\right) = 0$ και $AJ'_m\left(k_\perp b\right) + BY'_m\left(k_\perp b\right) = 0$

$\Rightarrow J'_m\left(k_\perp a\right)Y'_m\left(k_\perp b\right) - J'_m\left(k_\perp b\right)Y'_m\left(k_\perp a\right) = 0$

Κύματα TM: $h_z = 0, \quad e_z\left(\rho,\phi\right) = e^{im\phi}\left[AJ_m\left(k_\perp\rho\right) + BY_m\left(k_\perp\rho\right)\right]$

Οριακές συνθήκες: $e_z = 0\Big|_{\rho=a,b}$ και $e_\phi \propto \left.\dfrac{\partial e_z}{\partial \phi} = 0\right|_{\rho=a,b}$

$AJ_m\left(k_\perp a\right) + BY_m\left(k_\perp a\right) = 0$ και $AJ_m\left(k_\perp b\right) + BY_m\left(k_\perp b\right) = 0$

$\Rightarrow J_m\left(k_\perp a\right)Y_m\left(k_\perp b\right) - J_m\left(k_\perp b\right)Y_m\left(k_\perp a\right) = 0$

ΟΜΟΑΞΟΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ (6)

Επιφανειακό ρεύμα σε ομοαξονική γραμμή :

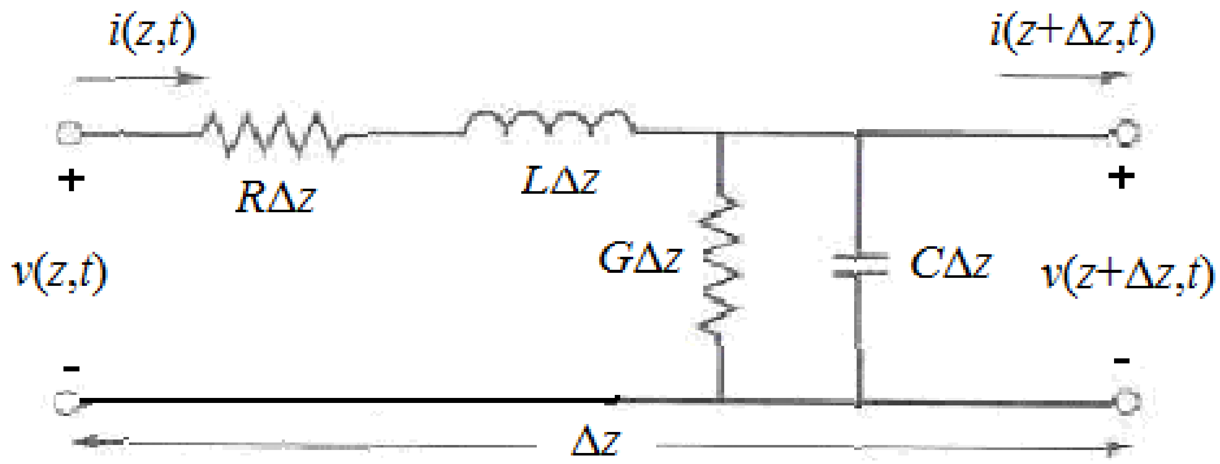
$$\vec{K} = \hat{\rho} \times \vec{H}\Big|_{\rho=a} \quad , \ \vec{K} = -\hat{\rho} \times \vec{H}\Big|_{\rho=b}$$

Ισχύς σε ομοαξονική γραμμή :

$$P_{o\lambda} = \oint \vec{p}_{av} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi p_z\left(\rho,\phi\right)$$

$$= \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \hat{z} \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\vec{E}\left(\rho,\phi\right) e^{-i\beta z} \times \vec{H}^*\left(\rho,\phi\right) e^{+i\beta z}\right\}$$

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (1)



Για γραμμή μεταφοράς με μήκος l (<< λ_0, μήκος κύματος ελευθέρου χώρου) γίνεται εφαρμογή των νόμων Kirchhoff, ενώ όταν $l \approx \lambda_0$ τότε χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Maxwell.

Παρόλα αυτά, και στη δεύτερη περίπτωση αν χωρίσουμε τη γραμμή σε στοιχειώδη μήκη Δz (<<λ_0), μπορούμε να εφαρμόσουμε τους νόμους Kirchhoff σε κάθε στοιχειώδες μήκος Δz.

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (2)

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{και} \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = Gv + C\frac{\partial v}{\partial t}$$

Για αρμονικά μεταβαλλόμενα πεδία:

$$v = v\left(z,t\right) = \mathrm{Re}\left\{V\left(z\right)e^{i\omega t}\right\},\ i = i\left(z,t\right) = \mathrm{Re}\left\{I\left(z\right)e^{i\omega t}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{dV}{dz} = RI + Li\omega I \\ -\dfrac{dI}{dz} = GV + Ci\omega V \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{dV}{dz} = \left(R + i\omega L\right)I \\ -\dfrac{dI}{dz} = \left(G + i\omega C\right)V \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow -\frac{d^2V}{dz^2} = \left(R + i\omega L\right)\frac{dI}{dz} = -\left(R + i\omega L\right)\left(G + i\omega C\right)V$$

$$\Rightarrow \frac{d^2V}{dz^2} - \left(R + i\omega L\right)\left(G + i\omega C\right)V = 0 \Rightarrow \frac{d^2V}{dz^2} - \gamma^2 V = 0$$

Ανάλογα ισχύει : $\dfrac{d^2 I}{dz^2} - \gamma^2 I = 0$

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (3)

Οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων είναι:

$$V(z) = V_+ e^{-\gamma z} + V_- e^{+\gamma z} \quad \text{και} \quad I(z) = I_+ e^{-\gamma z} + I_- e^{+\gamma z}$$

$$\Rightarrow I(z) = \frac{-1}{R + i\omega L} \frac{dV}{dz} = \frac{-1}{R + i\omega L}\left(-\gamma V_+ e^{-\gamma z} + \gamma V_- e^{+\gamma z}\right)$$

$$\Rightarrow I(z) = \sqrt{\frac{G + i\omega C}{R + i\omega L}}\left(V_+ e^{-\gamma z} - V_- e^{+\gamma z}\right)$$

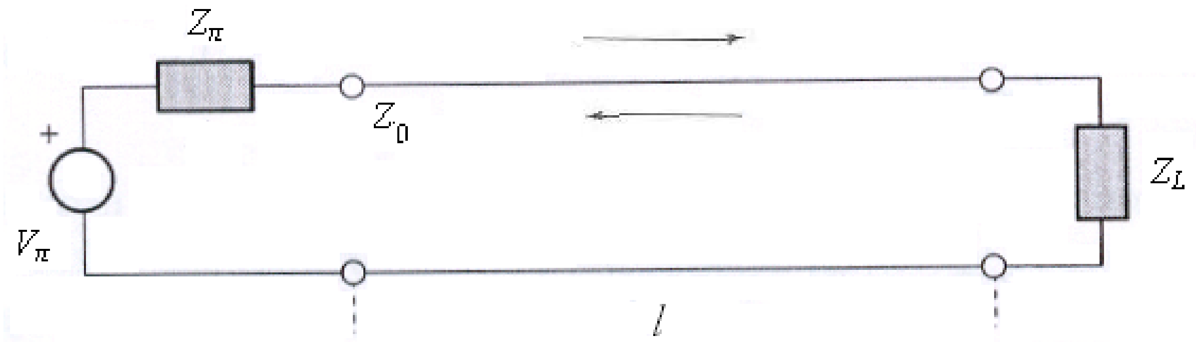
$$\Rightarrow I(z) = \frac{1}{Z_0}\left(V_+ e^{-\gamma z} - V_- e^{+\gamma z}\right)$$

$Z_0 = \sqrt{\dfrac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$ είναι η σύνθετη αντίσταση γραμμής μεταφοράς

Γραμμή χωρίς απώλειες

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma = i\omega\sqrt{LC} = i\beta, \quad u_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$$

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (4)



$V_+e^{-\gamma z}$: προσπίπτον κύμα και $V_-e^{+\gamma z}$: ανακλώμενο κύμα

$$\rho(z) = \frac{V_{\alpha\nu}}{V_{\pi\rho}} = \frac{V_-e^{+\gamma z}}{V_+e^{-\gamma z}} \Rightarrow \rho(l) = \frac{V_-}{V_+}e^{+2\gamma l}$$

$$\frac{V(z)}{I(z)} = Z(z) = Z_0\frac{V_+e^{-\gamma z}+V_-e^{+\gamma z}}{V_+e^{-\gamma z}-V_-e^{+\gamma z}} \Rightarrow Z(z) = Z_0\frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)} \Rightarrow \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{Z(z)}{Z_0} = 1+\frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)} \Rightarrow \frac{Z_w+Z(z)}{Z_0} = \frac{2}{1-\rho(z)} \Rightarrow \rho(z) = \frac{Z(z)-Z_0}{Z(z)+Z_0}$$

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (5)

- $Z(z) = Z_0 \Rightarrow \rho(z) = 0$ προσαρμογή
- $Z(z) = 0 \Rightarrow \rho(z) = -1$ βραχυκύκλωμα
- $Z(z) = \infty \Rightarrow \rho(z) = +1$ ανοιχτοκύκλωμα

$$\rho_L = \rho(l) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{V_-}{V_+} e^{2\gamma l} \quad (2.1)$$

Στην είσοδο: $Z_{in} = Z(0) = Z_0 \dfrac{V_+ + V_-}{V_+ - V_-}$

Στο φορτίο: $Z_L = Z_0 \dfrac{V_+ e^{-\gamma l} + V_- e^{+\gamma l}}{V_+ e^{-\gamma l} - V_- e^{+\gamma l}} \Rightarrow \dfrac{Z_L}{Z_0} = \dfrac{1 + \dfrac{V_-}{V_+} e^{2\gamma l}}{1 - \dfrac{V_-}{V_+} e^{2\gamma l}}$

$\zeta_L = \dfrac{Z_L}{Z_0}$ είναι η ανηγμένη αντίσταση στο φορτίο

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (6)

$$1+\frac{V_-}{V_+}e^{2\gamma l}=\zeta_L-\zeta_L\left(\frac{V_-}{V_+}\right)e^{2\gamma l}\Rightarrow\left(\frac{V_-}{V_+}\right)e^{2\gamma l}\left(1+\zeta_L\right)=\zeta_L-1\Rightarrow\frac{V_-}{V_+}=\frac{\zeta_L-1}{\zeta_L+1}e^{-2\gamma L}$$

$$\Rightarrow\zeta_{in}=\frac{1+\dfrac{V_-}{V_+}}{1-\dfrac{V_-}{V_+}}=\frac{\left(\zeta_L+1\right)+\left(\zeta_L-1\right)e^{-2\gamma L}}{\left(\zeta_L+1\right)-\left(\zeta_L-1\right)e^{-2\gamma L}}=\frac{\zeta_L\left(e^{\gamma L}+e^{-\gamma L}\right)+\left(e^{\gamma L}-e^{-\gamma L}\right)}{\zeta_L\left(e^{\gamma L}+e^{-\gamma L}\right)+\left(e^{\gamma L}-e^{-\gamma L}\right)}$$

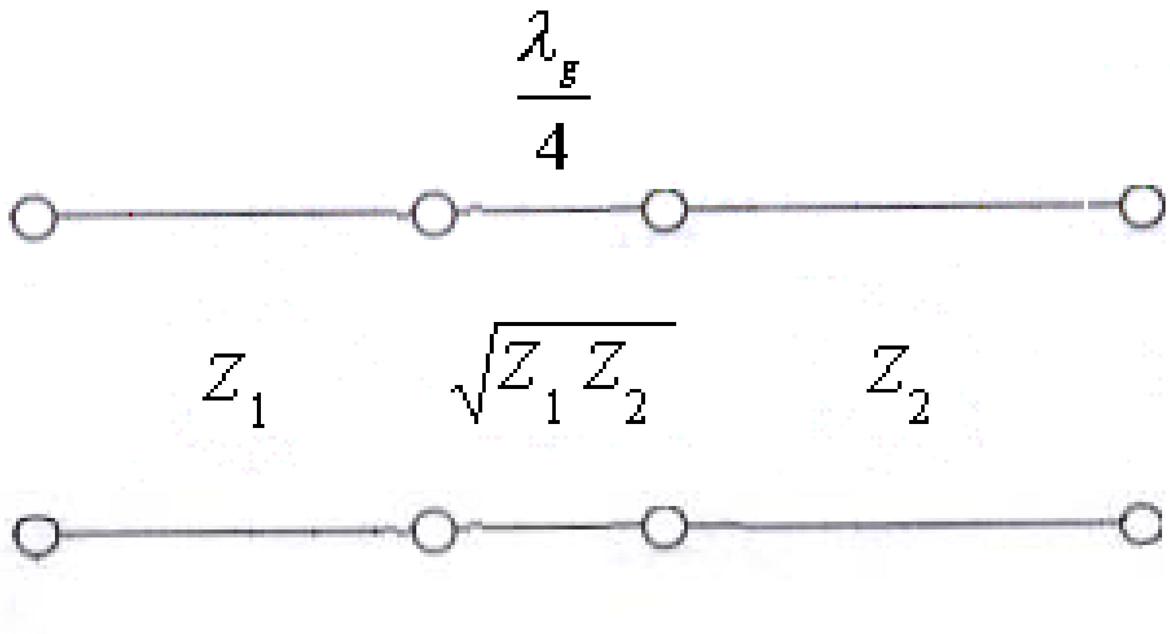
$$\Rightarrow\zeta_{in}=\frac{\zeta_L\cosh\left(\gamma l\right)+\sinh\left(\gamma l\right)}{\zeta_L\sinh\left(\gamma l\right)+\cosh\left(\gamma l\right)}\Rightarrow\frac{Z_{in}}{Z_0}=\frac{\dfrac{Z_L}{Z_0}+\tanh\left(\gamma l\right)}{1+\dfrac{Z_L}{Z_0}\tanh\left(\gamma l\right)}$$

Γραμμη μεταφορας χωρίς απώλειες:

$$\gamma=i\beta\left(=i\omega\sqrt{LC}\in I\right),\quad\tanh\left(ix\right)=i\tan\left(x\right),\quad\frac{Z_{in}}{Z_0}=\frac{\dfrac{Z_L}{Z_0}+i\tan\left(\beta l\right)}{1+i\dfrac{Z_L}{Z_0}\tan\left(\beta l\right)}$$

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (7)

- $l = \dfrac{\lambda_g}{2} \Rightarrow \beta l = \pi \Rightarrow Z_{in} = Z_L$
- $l = \dfrac{\lambda_g}{4} \Rightarrow \beta l = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{Z_{in}}{Z_0} = \dfrac{Z_0}{Z_L} \Rightarrow Z_{in} Z_L = Z_0^2$



ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (8)

$$V(z) = V_+ e^{-\gamma z} + V_- e^{+\gamma z} = V_+ e^{-a z} e^{-i\beta z} + V_- e^{+a z} e^{i\beta z}$$

$$= V_+ e^{-a z} e^{-i\beta z} \left[1 + \left(\frac{V_-}{V_+} \right) e^{2az} e^{2i\beta z} \right] = V_+ e^{-a z} e^{-i\beta z} \left[1 + \rho_L e^{2a(z-l)} e^{i2\beta(z-l)} \right]$$

$$\rho_L \in C \Rightarrow V(z) = V_+ e^{-az} e^{-i\beta z} \left[1 + |\rho_L| e^{2a(z-l)} e^{i2\beta(z-l)+i\psi} \right]$$

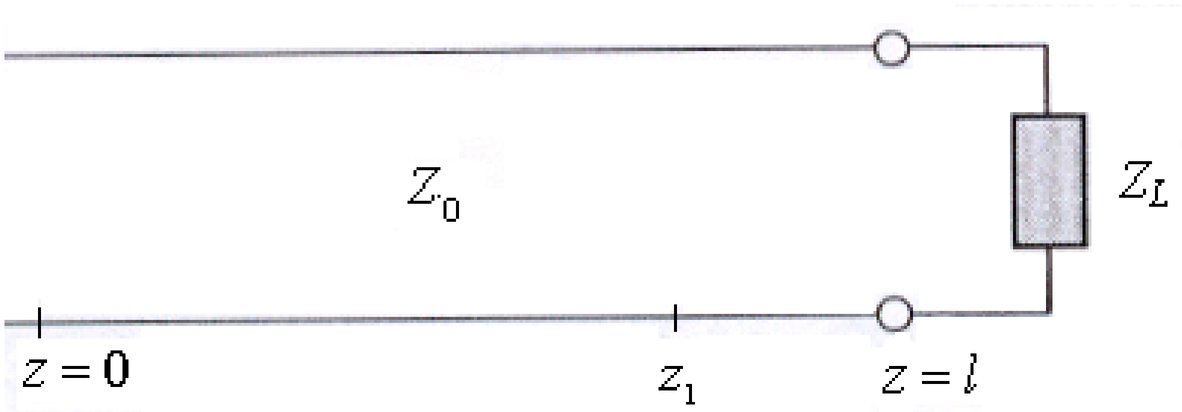
Χωρίς απώλειες :

$$V(z) = V_+ e^{-i\beta z} \left[1 + |\rho_L| e^{i[\psi + 2\beta(z-l)]} \right] \Rightarrow$$

$$|V(z)| = |V_+| \sqrt{\left(1 + |\rho_L| \cos\left[\psi + 2\beta(z-l)\right]\right)^2 + |\rho_L|^2 \sin^2\left[\psi + 2\beta(z-l)\right]}$$

$$= |V_+| \sqrt{\left(1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cos\left[\psi + 2\beta(z-l)\right]\right)}$$

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (9)



$$\frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|} = S \text{ είναι ο λόγος στάσιμου κύματος τάσης } VSWR$$

$$0 \le |\rho_L| \le 1 \Rightarrow 1 \le S < \infty$$

Το πρώτο ελάχιστο τάσης απέχει από το φορτίο απόσταση $d \equiv l - z_1$:

$$\cos\left[\psi + 2\beta\left(z_1 - l\right)\right] = -1 \Rightarrow \cos\left(\psi - 2\beta d\right) = \cos\left(\pi\right)$$

$$\Rightarrow \psi - 2\beta d = \pi \Rightarrow d = \frac{\psi - \pi}{2\beta}$$

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (10)

Χάρτης Smith

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\zeta_L - 1}{\zeta_L + 1} \Rightarrow \rho_L = |\rho_L| e^{i\psi} = |\rho_L|\cos\psi + i|\rho_L|\sin\psi \equiv u + iv$$

$$\zeta_L = R + iX$$

$$\rho_L = \frac{(R-1) + iX}{(R+1) + iX}$$

$$|\rho_L| = \frac{\sqrt{(R-1)^2 + X^2}}{\sqrt{(R+1)^2 + X^2}},\ \psi = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R-1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{X}{R+1}\right)$$

$$\rho_L = \frac{\left[(R-1) + iX\right]\left[(R+1) - iX\right]}{(R+1)^2 + X^2} = \frac{1}{\left[(R+1)^2 + X^2\right]}\left\{\left(R^2 - 1 + X^2\right) + i2X\right\}$$

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (11)

$$u = |\rho_L| \cos\psi \quad \text{και} \quad v = |\rho_L| \sin\psi \Rightarrow -1 \le u, v \le 1$$

$$|\rho_L| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$u = \frac{R^2 + X^2 - 1}{(R+1)^2 + X^2} \qquad v = \frac{2X}{(R+1)^2 + X^2}$$

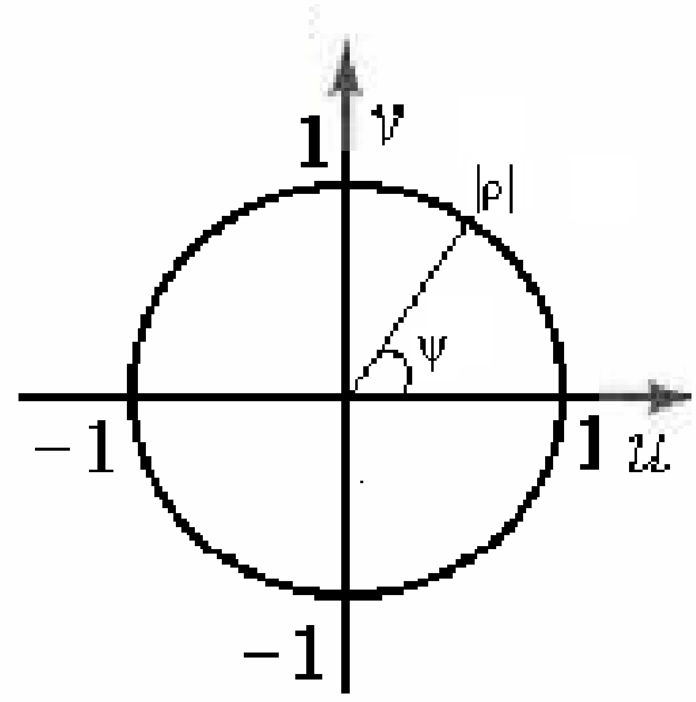
$$R = 0 \Rightarrow |\rho_L| = 1 \quad \psi = 0, \pi$$

$$X = 0 \Rightarrow |\rho_L| = \frac{|R-1|}{R+1}$$

$$SWR = \frac{R+1+|R-1|}{R+1-|R-1|}$$

i) $R > 1: \; SWR = R$

ii) $R < 1: \; SWR = \frac{1}{R}$



ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (12)

$$\zeta = R + iX = \frac{1+\rho_L}{1-\rho_L} = \frac{1+u+iv}{1-u-iv}$$

$$\Rightarrow \left(u - \frac{R}{R+1}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{\left(R+1\right)^2}$$

$$\left(u-1\right)^2 + \left(v - \frac{1}{X}\right)^2 = \frac{1}{X^2}$$

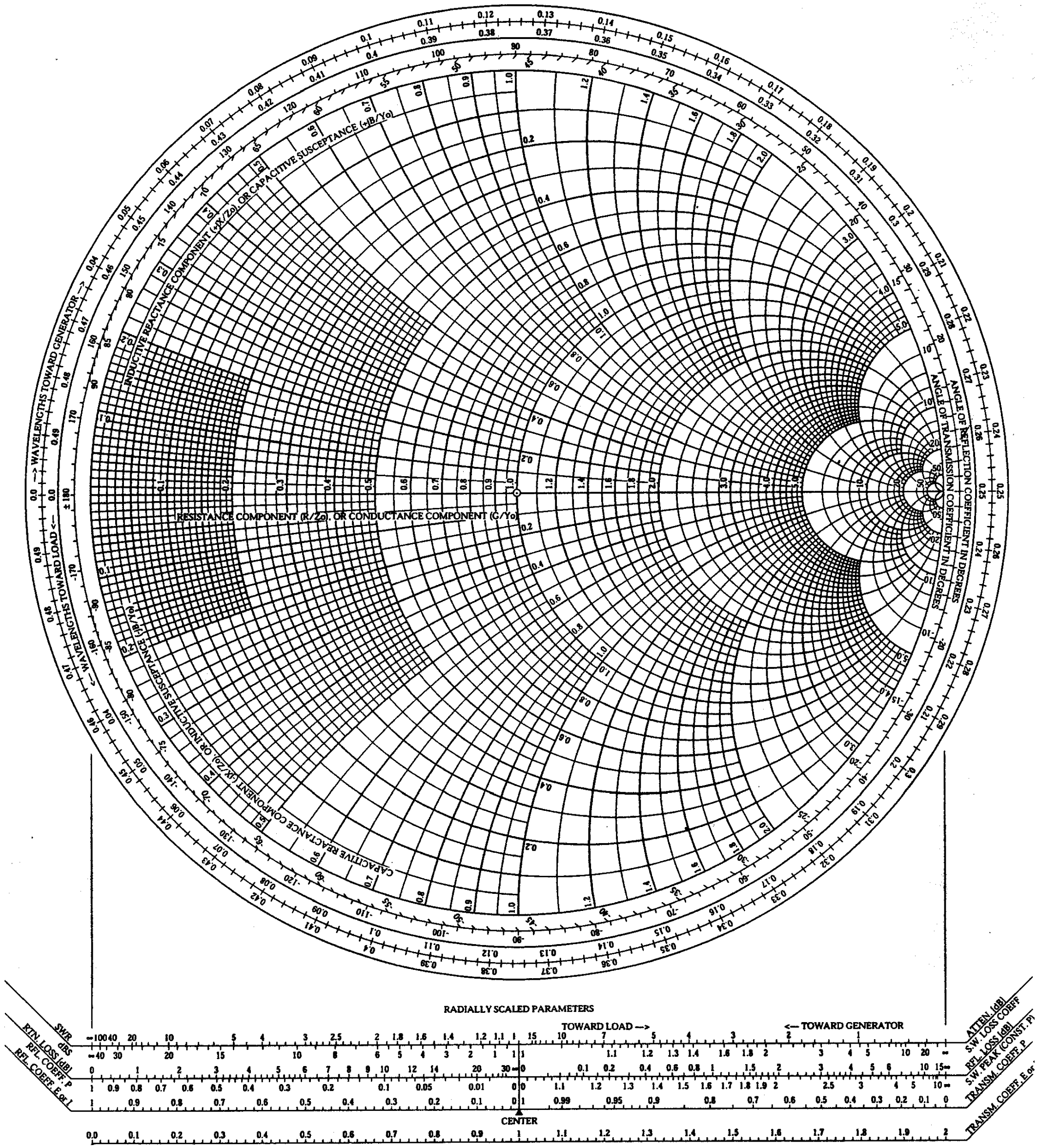
$$\left.\begin{array}{l} R = \text{σταθερό} \\ -\infty < X < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{κύκλος: κέντρο} \left(u = \frac{R}{R+1}, v = 0\right), \quad \text{ακτίνα } \frac{1}{R+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} X = \text{σταθερό} \\ 0 < R < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{κύκλος: κέντρο} \left(u = 1, v = \frac{1}{X}\right), \quad \text{ακτίνα } \frac{1}{X}$$

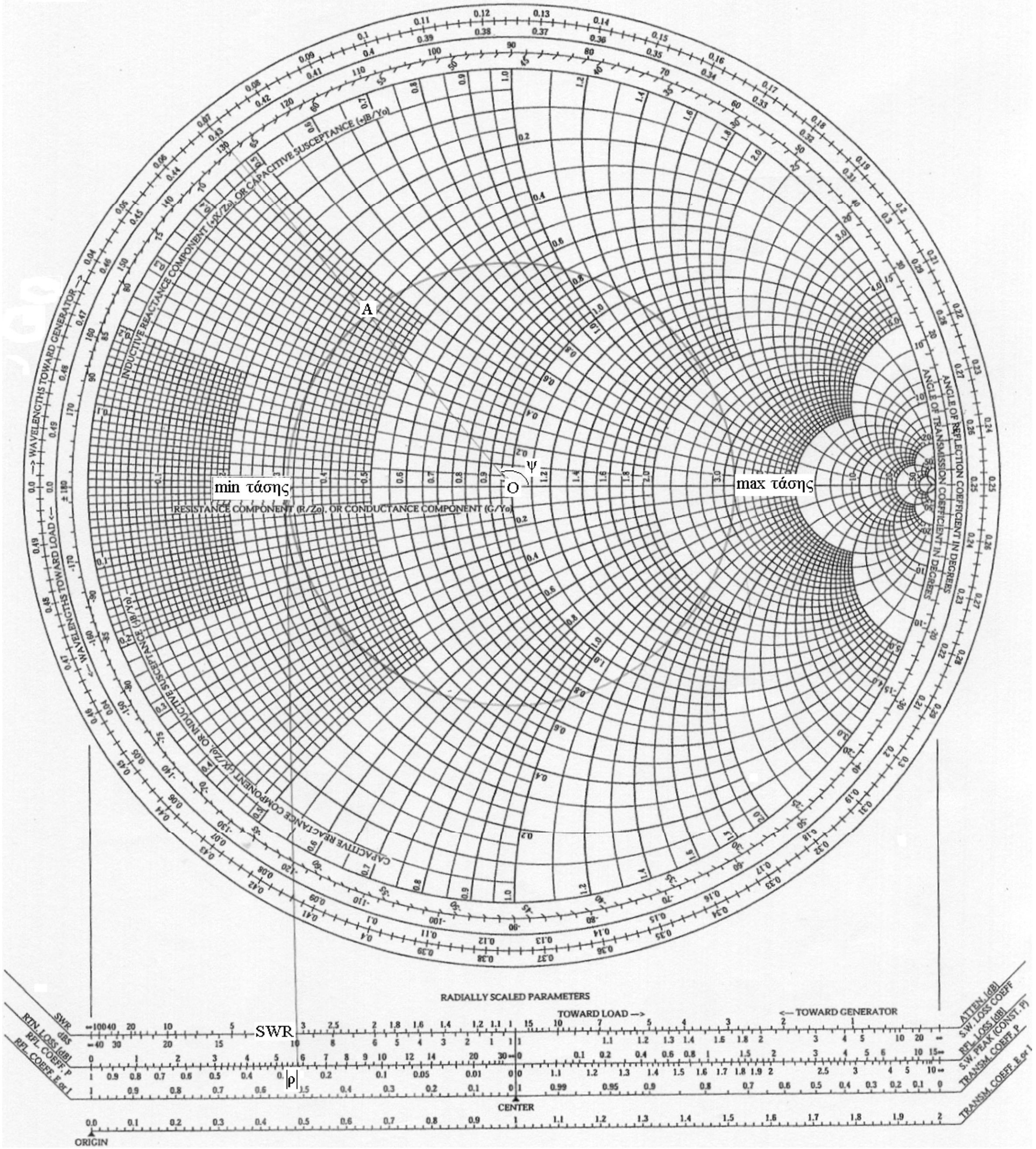
ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (13)

The Complete Smith Chart

Black Magic Design

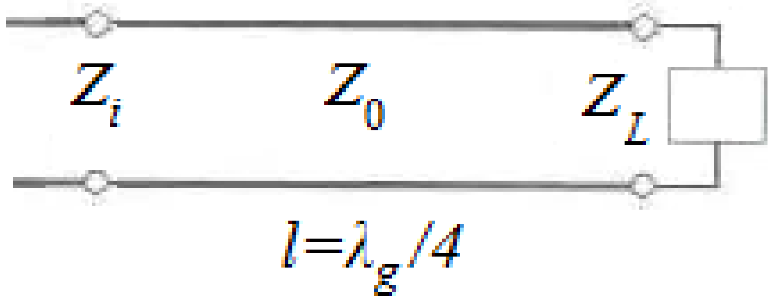


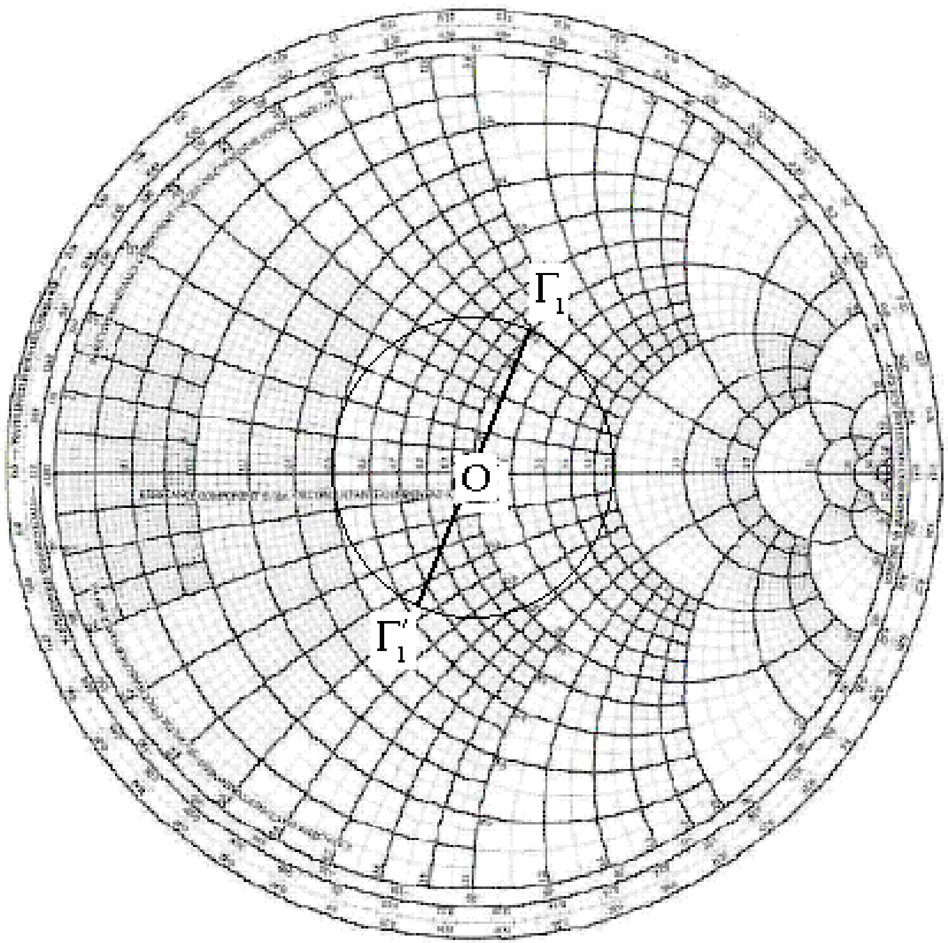
ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (14)



ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (15)

$$\frac{Z_i}{Z_0} = \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_0}} \Rightarrow \zeta_i = \frac{1}{\zeta_L} = y_L$$





Η ανηγμένη αντίσταση ενός σημείου ισούται με την ανηγμένη αγωγιμότητα του αντιδιαμετρικού του σημείου.

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (16)

Άσκηση 4. Έστω γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες με χαρακτηριστική αντίσταση 50 Ω, φορτίο Z_L=20–i30 (Ω) και συχνότητα λειτουργίας 50 MHz. Να βρεθεί ο συντελεστής ανάκλασης στο φορτίο, ο λόγος στασίμου κύματος και η θέση του πρώτου ελαχίστου τάσης από το φορτίο αναλυτικά και γραφικά.

Λύση

$$\zeta_L = \frac{Z_L}{Z_0} = 0.4 - i0.6 \text{ σημείο } \mathrm{M}\left(0.4, -0.6\right) \Rightarrow$$

$$\rho_L = \frac{0.4 - i0.6 - 1}{0.4 - i0.6 + 1} = \frac{-0.6 - i0.6}{1.4 - i0.6} = \frac{-0.6}{2.32}\left(0.8 + i2\right) \cong 0.557 e^{i248^o},$$

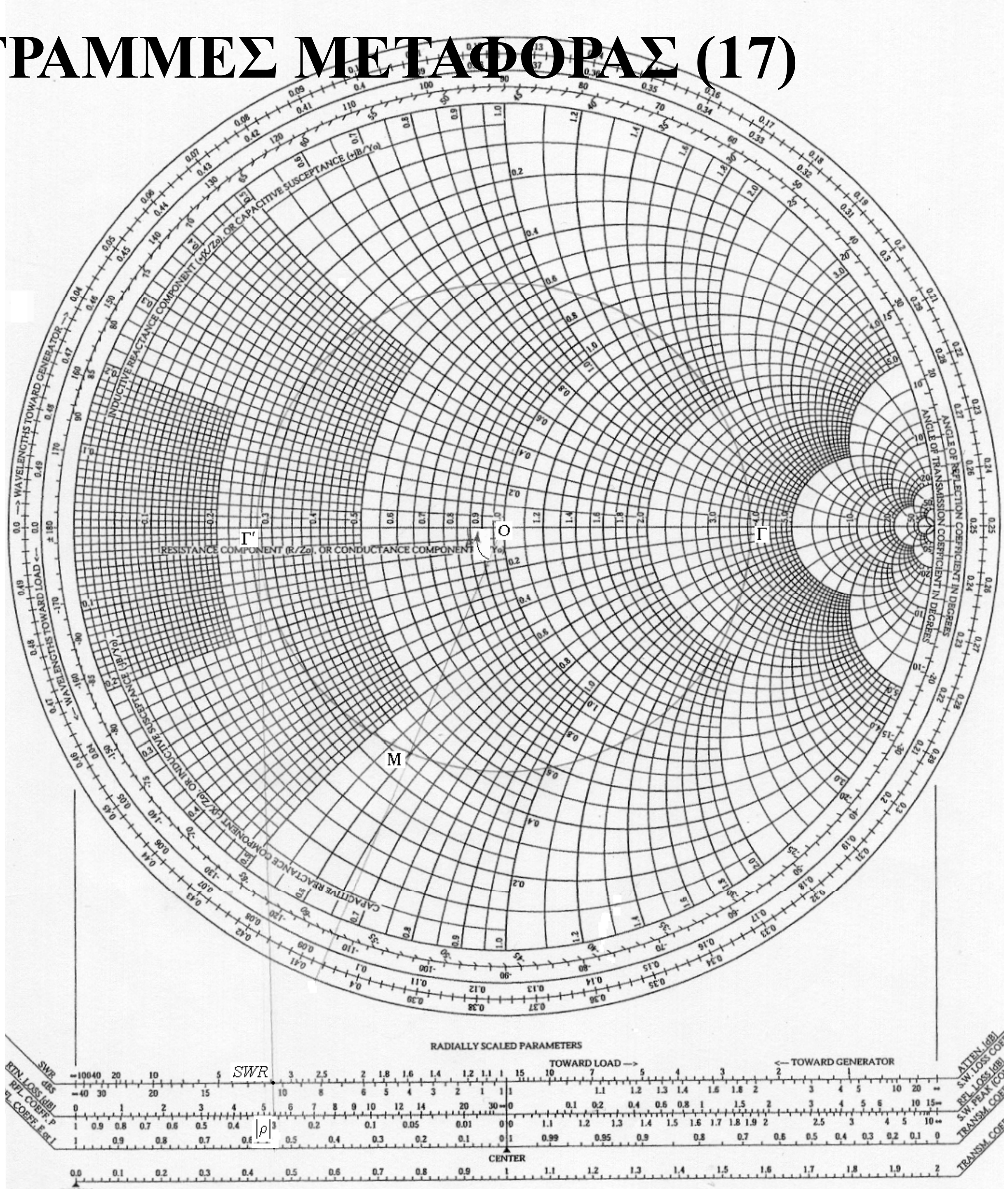
$$SWR = \frac{1+\left|\rho_L\right|}{1+\left|\rho_L\right|} = \frac{1.557}{0.443} \cong 3.516$$

1^{o} ελάχιστο τάσης: $d = \dfrac{\psi - \pi}{2\beta} \approx 0.57m,\ \beta = \dfrac{2\pi}{\lambda_g} = \dfrac{2\pi f}{c} = \dfrac{\pi}{3}$, στο χάρτη Smith κινούμαστε

δεξιοστρόφα κατά $\varphi = 68^0 \Rightarrow \dfrac{68^0}{360^0}\dfrac{\lambda_g}{2}\left(\text{τόξο } \mathrm{M}\Gamma'\right)$

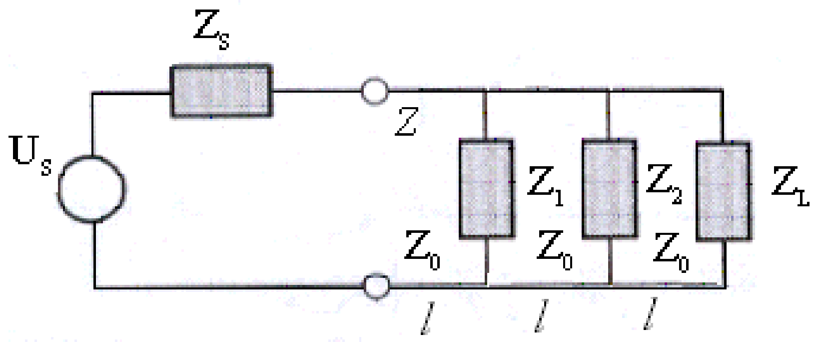
ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (17)

Χάρτης Smith
για την άσκηση 4



ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (18)

Άσκηση 5. Έστω γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες με χαρακτηριστική αντίσταση 100 Ω και φορτίο 65 + i100 Ω. Κατά μήκος της γραμμής και σε αποστάσεις $l = 0.132\lambda_g$ συνδέονται τα φορτία $Z_1 = i87$ Ω και $Z_2 = 500$ Ω.



Αν στην είσοδο της γραμμής τοποθετηθεί πηγή με τάση $U_S = 100$ V και $Z_S = 100$ Ω. Πόση είναι η σύνθετη αντίσταση στην είσοδο της γραμμής καθώς πόση η κατανάλωση ισχύος σε αυτήν;

Λύση

$$\zeta_L = 0.65 + i \left(\text{σημείο T}\right)$$

$$y_L = \frac{1}{\zeta_L} = 0.45 - i0.7 \left(\text{σημείο U}\right) \text{ αντιδιαμετρικό σημείο του T}$$

Ο εξωτερικός κύκλος τέμνεται στο $0.392\lambda_g$ από την προέκταση της ευθείας OU. Κινούμαστε κατά $0.132\lambda_g$ προς την πηγή, δηλ.

$$0.392\lambda_g + 0.132\lambda_g = 0.524\lambda_g \Rightarrow \text{σημείο A } y_L^A = 0.3 + i0.14$$

ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (19)

$\zeta_2 = 5 \Rightarrow y_2 = 0.2 \Rightarrow y_B = y_L^A + y_2 = 0.5 + i0.14$. Νέος κύκλος $\left(\mathrm{O,OB}\right)$.

Η προέκταση της ακτίνας ΟΒ τέμνει τον εξωτερικό κύκλο στο $0.03\lambda_g$.

Κινούμαστε προς την πηγή κατά $0.132\lambda_g$, δηλ. $0.132\lambda_g + 0.03\lambda_g = 0.162\lambda_g$

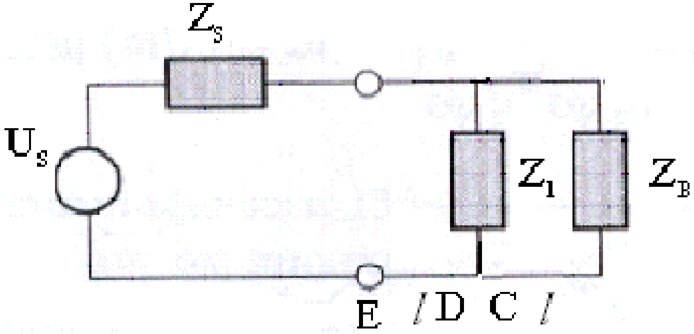
$\Rightarrow$ σημείο C $y_C = 1.1 + i0.75$ και $y_1 = \dfrac{1}{\zeta_1} = \dfrac{1}{i0.87} = -i1.15 \Rightarrow$

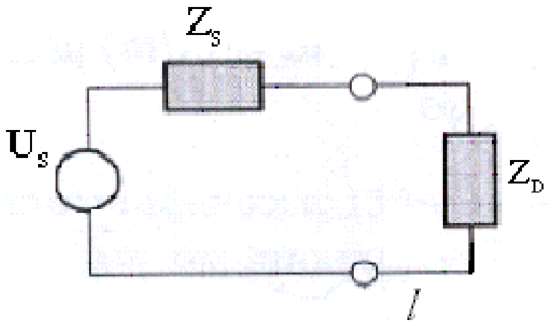
$y_D = y_C + y_1 = 1.1 + i0.75 - i1.15 = 1.1 - i0.4$.

Ηευθεία OD τέμνει τον εξωτερικό κύκλο στο $0.32\lambda_g$. Κινούμαστε ξανά προς την πηγή κατά $0.132\lambda_g$, δηλ. $0.132\lambda_g + 0.32\lambda_g = 0.472\lambda_g \Rightarrow$ σημείο Ε

$y_E \approx 0.67 - i0.1$. Παίρνουμε το αντιδιαμετρικό σημείο F του Ε,

$\zeta_F = 1.4 + i0.2 \Rightarrow Z_F = 140 + i20\,\Omega$





Βήματα επίλυσης

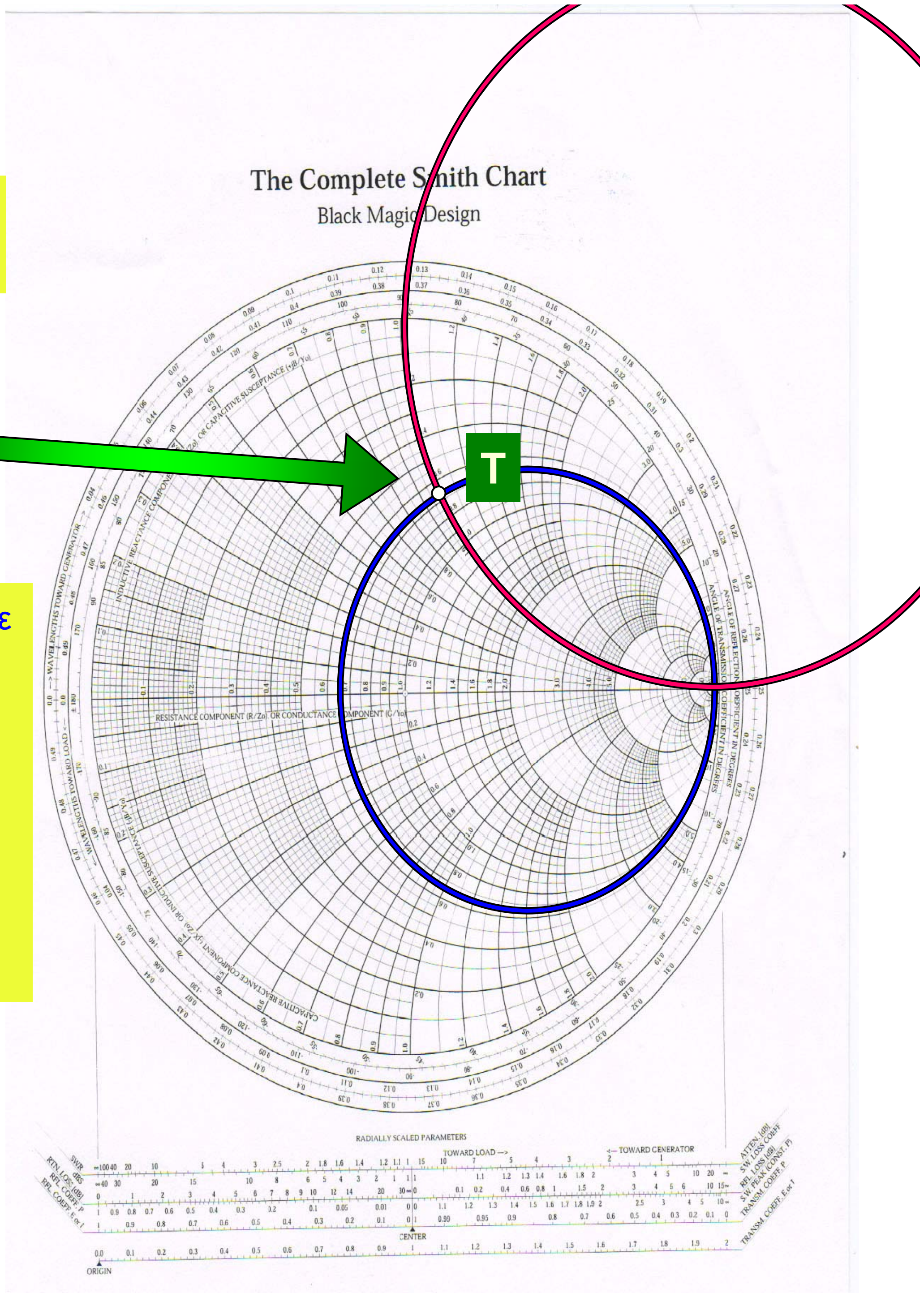
1. Αντιστοιχίζουμε την ανηγμένη αντίσταση του φορτίου ζ_L (=0.65+*i*1) στο σημείο T.

Βρίσκουμε τον κύκλο με R=0.65

Βρίσκουμε τον κύκλο με X=1

Η τομή τους είναι το σημείο T

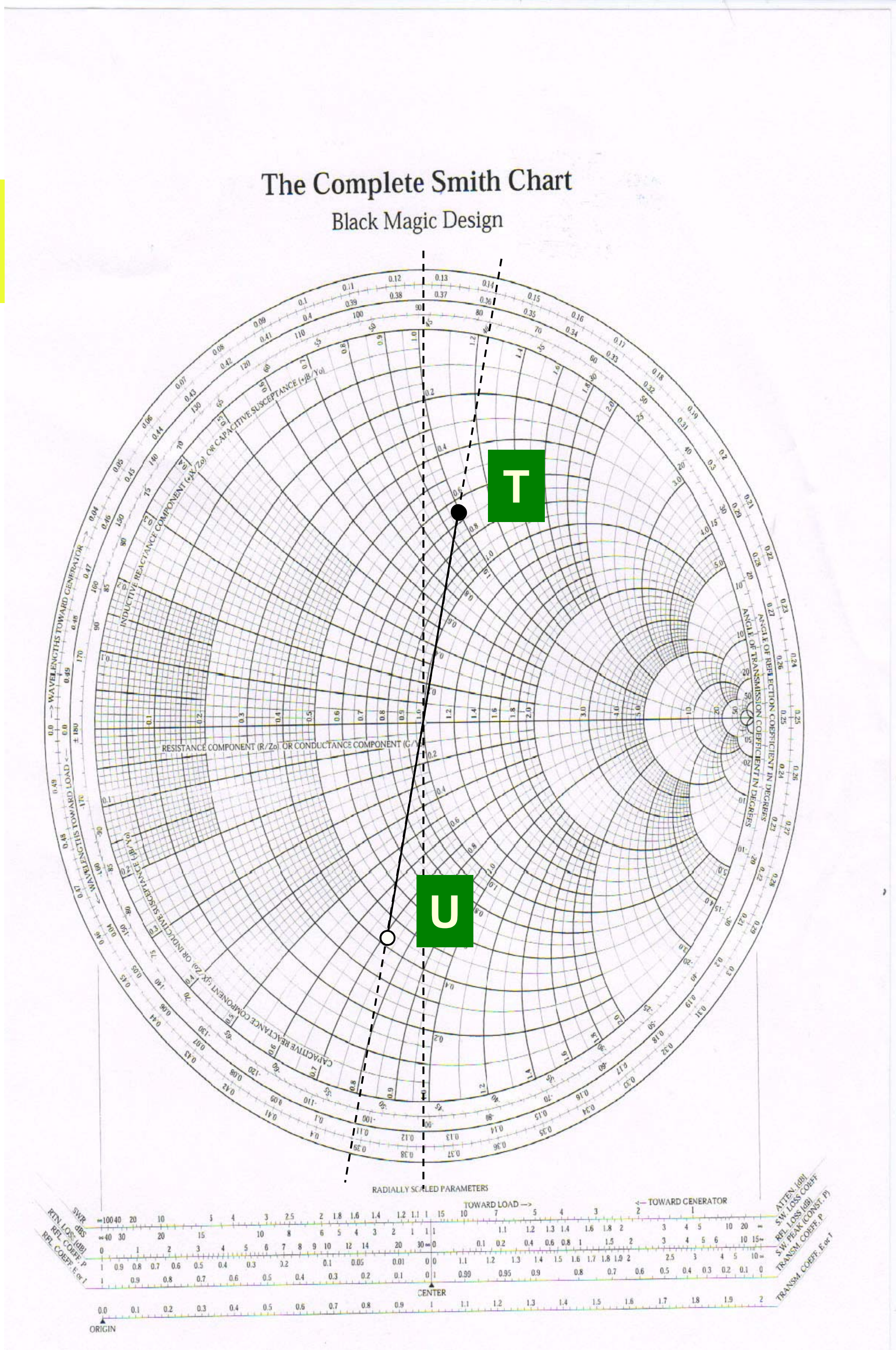
2. Επειδή οι αντιστάσεις Z_1 και Z_2 συνδέονται με το φορτίο παράλληλα συμφέρει να δουλέψουμε με αγωγιμότητες. Έτσι, αντί για το σημείο T, λοιπόν, επιλέγουμε το αντιδιαμετρικό του U, αφού στο χάρτη Smith μπορούν να παρασταθούν τόσο αντιστάσεις όσο και αγωγιμότητες, αρκεί αυτές να είναι ανηγμένες ποσότητες.



Βήματα επίλυσης

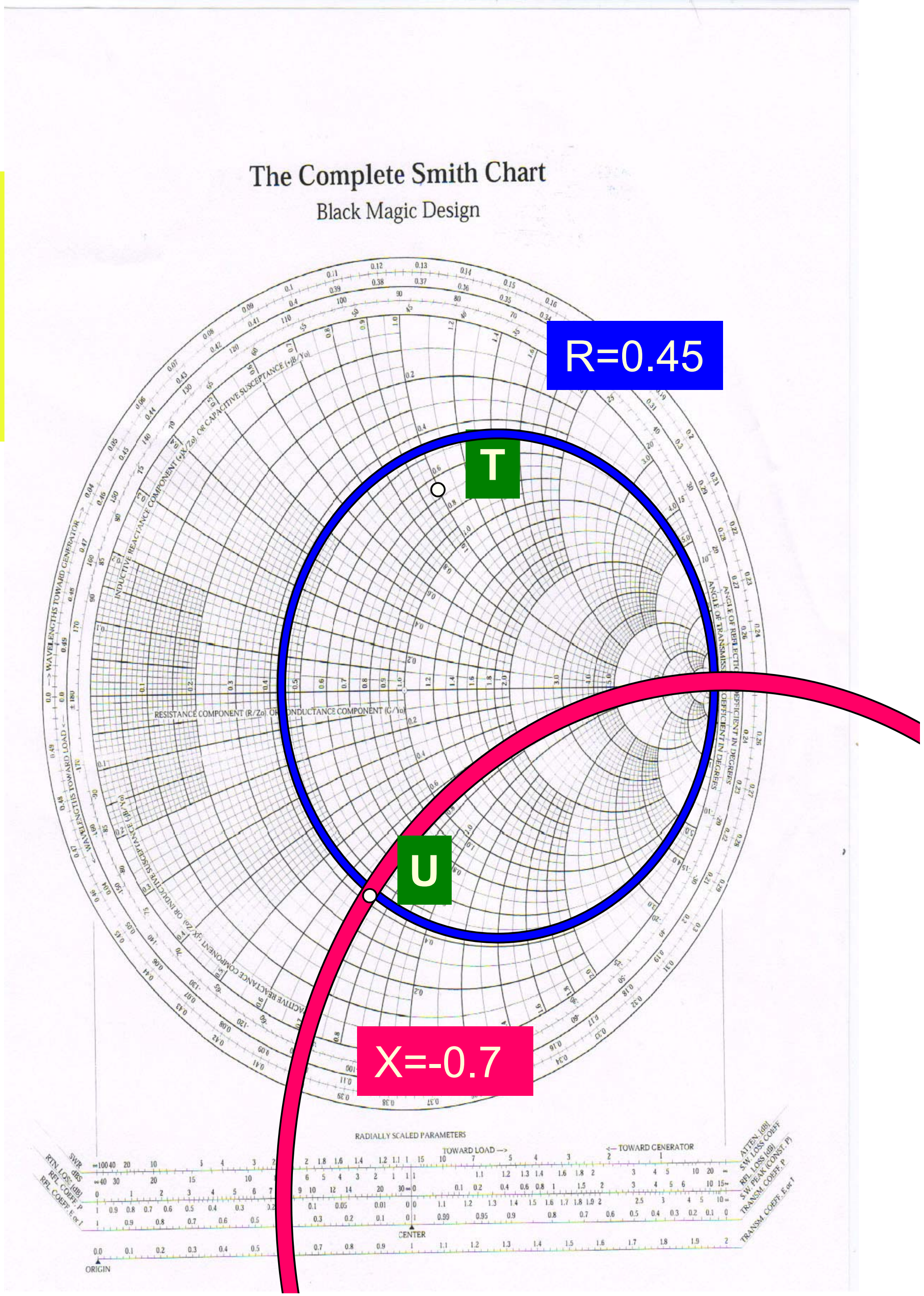
1. Αντιστοιχίζουμε την ανηγμένη αντίσταση του φορτίου Z_L στο σημείο T.

2. Επειδή οι αντιστάσεις Z_1 και Z_2 συνδέονται με το φορτίο παράλληλα συμφέρει να δουλέψουμε με αγωγιμότητες. Αντί για το σημείο T, λοιπόν, επιλέγουμε το αντιδιαμετρικό του U, εφόσον τα σημεία στο χάρτη Smith μπορούν να παριστούν τόσο αντιστάσεις όσο και αγωγιμότητες, αρκεί αυτές να είναι ανηγμένες.



Βήματα επίλυσης

3. Το σημείο U όπως είναι φυσικό αντιστοιχεί στην αγωγιμότητα y_L=1/(0.65+i)=0.45-i 0.7
4. Πράγματι, αυτό μπορεί να επαληθευτεί με το γεγονός ότι το σημείο U στο χάρτη Smith είναι η τομή των κύκλων R=0.45 και X=-0.7



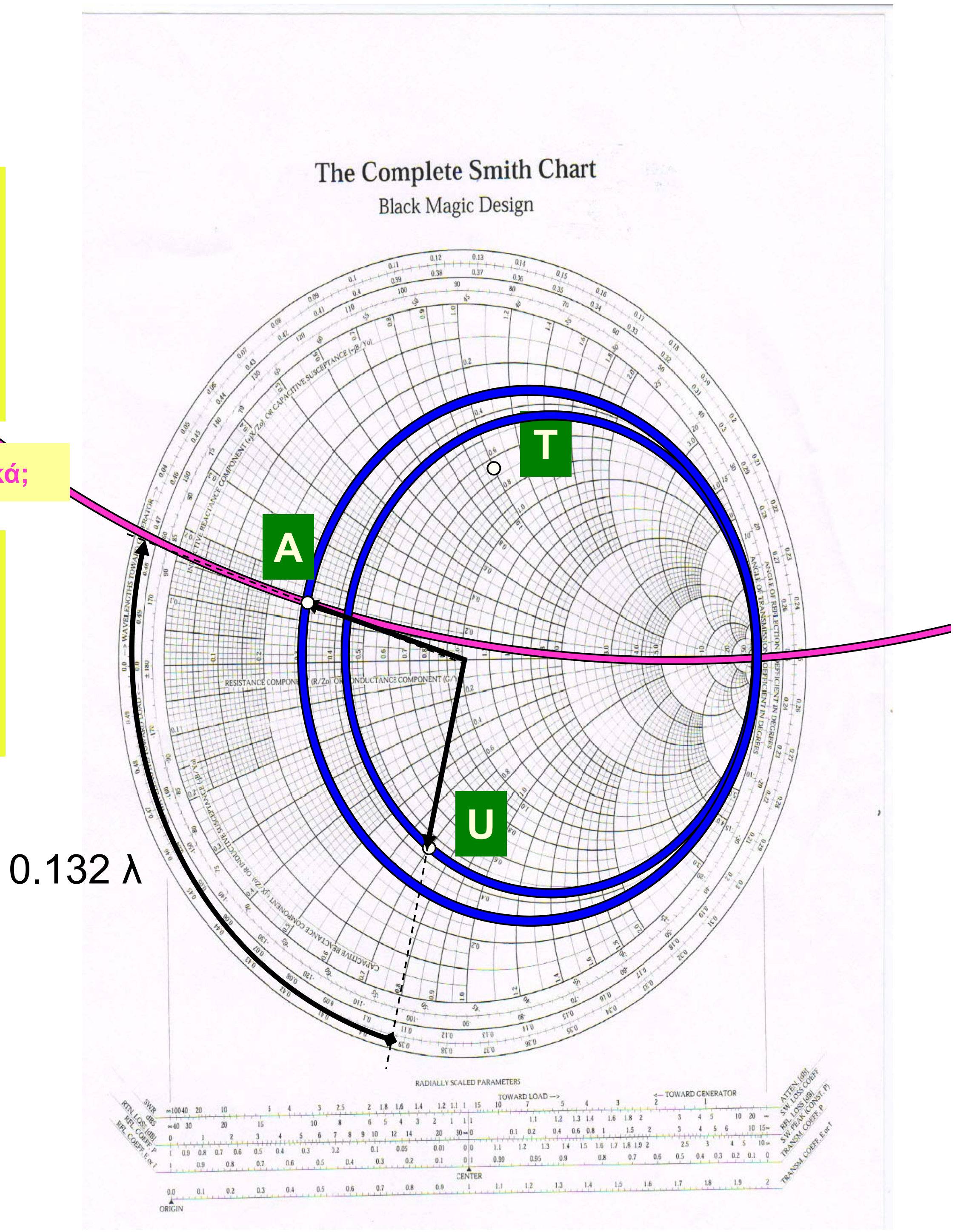
Βήματα επίλυσης

5. Στη συνέχεια μετακινούμαστε σε τόξο μήκους $0.132\lambda_g$, το οποίο αντιστοιχεί σε μετακίνηση από το φορτίο προς την πηγή, για αυτό και η κίνηση γίνεται δεξιόστροφα.

Ερώτηση: Το σημείο Α βρίσκεται μόνο γραφικά;

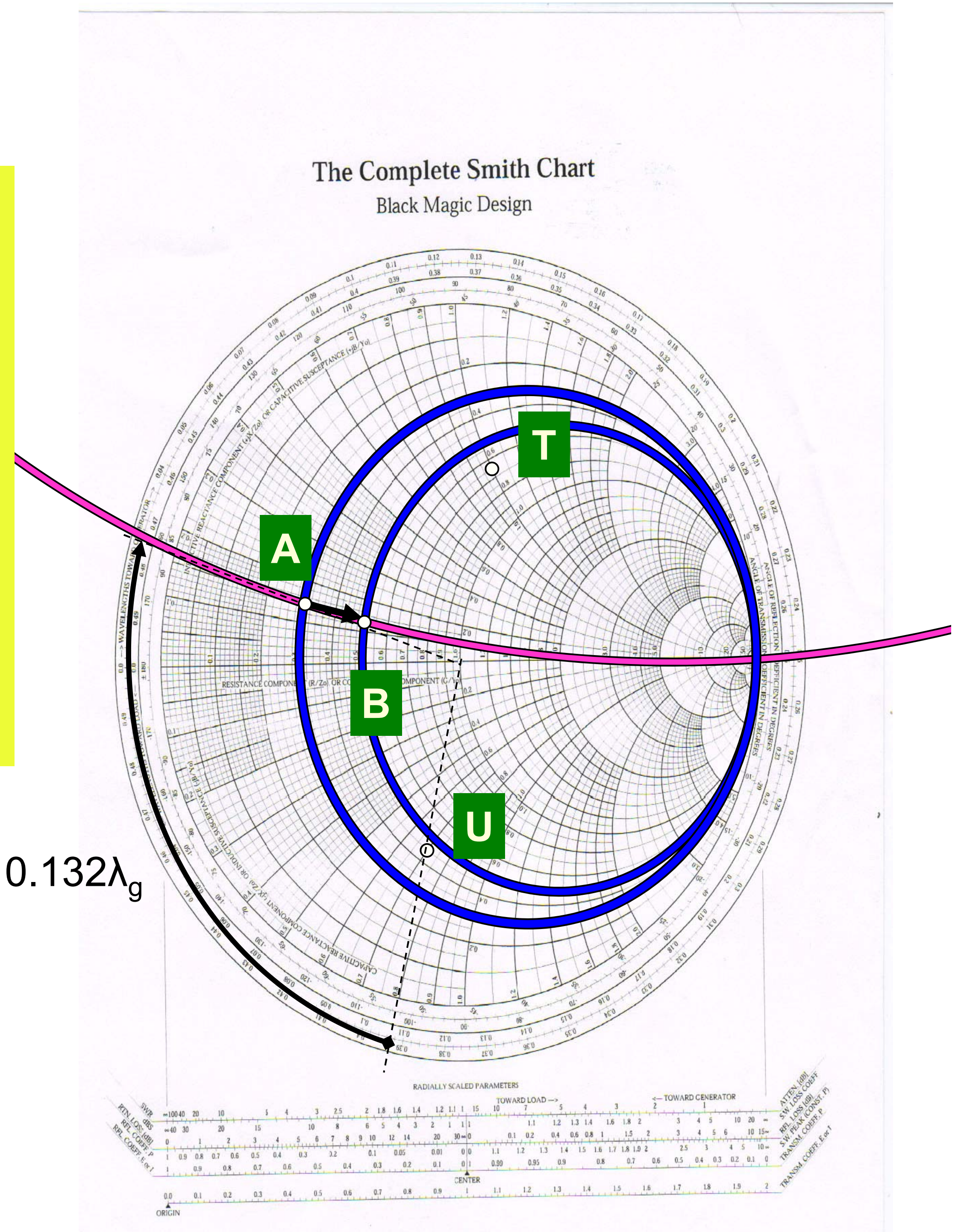
6. Προσοχή: Είναι λάθος να πέσει το σημείο Α πάνω στον κύκλο R=0.45.
7. Το σημείο Α απέχει από την αρχή Ο όσο είναι το μέτρο της ακτίνας OU.

8. Το σημείο Α έχει ανηγμένη αγωγιμότητα y_L=0.3 + i 0.14 και είναι η τομή των κύκλων R=0.3 και X=0.14.



Βήματα επίλυσης

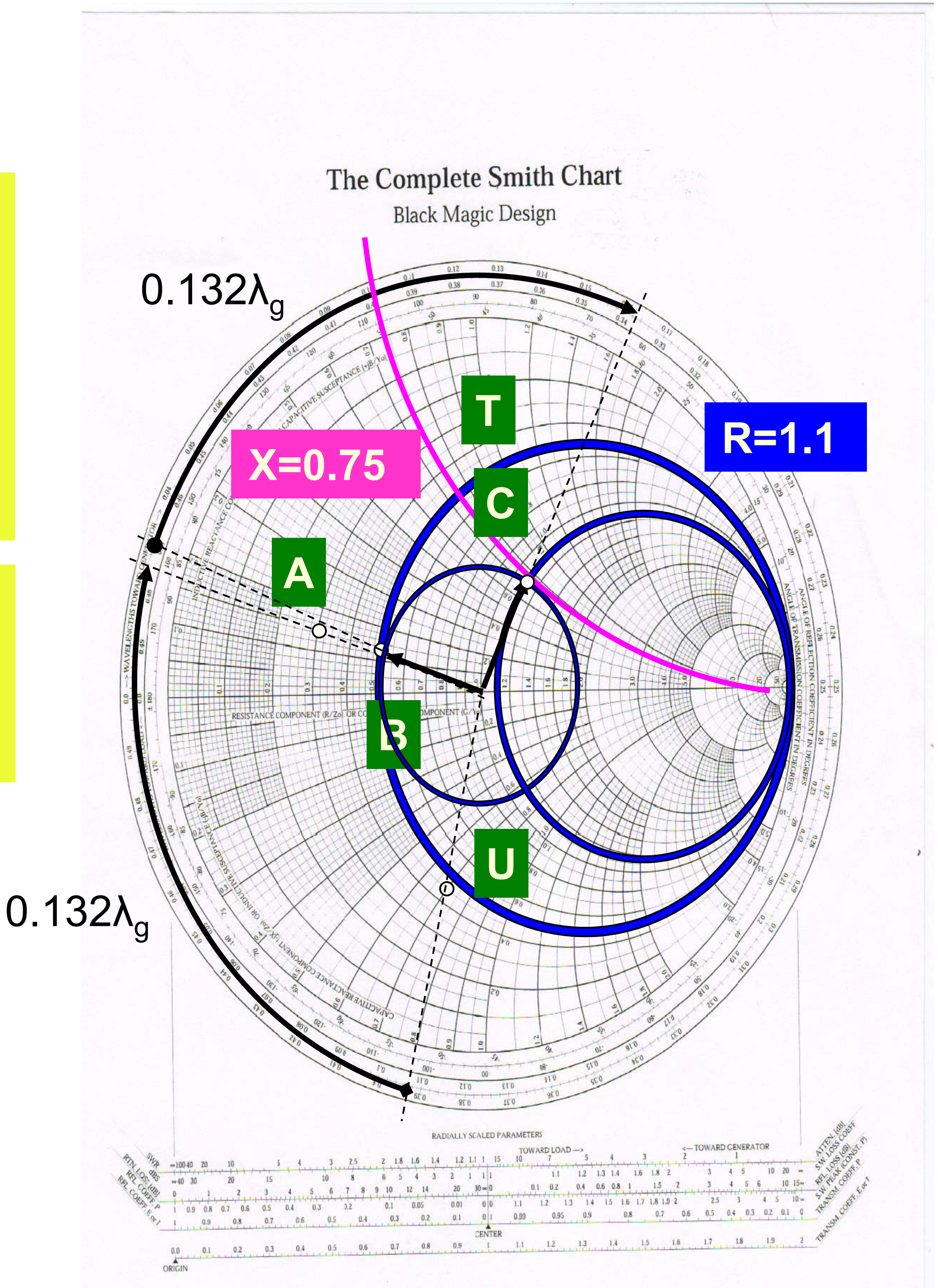
9. Στη συνέχεια, προσθέτουμε την ανηγμένη αντίσταση ζ_2=5, η οποία δεν έχει φανταστικό μέρος.
10. Προσοχή: Δουλεύουμε με ανηγμένες αγωγιμότητες, γι' αυτό μετατρέπουμε πρώτα τη ζ_2 σε y_2=0.2.
11. Κινούμαστε πάνω στο τόξο που αντιστοιχεί στο X=0.14, αφού το φορτίο Z_2 δεν έχει φανταστικό μέρος.
12. Έτσι βρίσκουμε το σημείο B που αντιστοιχεί σε R=0.5



Βήματα επίλυσης

12. Όπως και προηγουμένως υπολογίζουμε την επίδραση του μήκους l της γραμμής μεταφοράς μεταξύ των φορτίων Z_2 και Z_1, μετακινούμενοι πάλι πάνω σε τόξο $0.132\lambda_g$ δεξιόστροφα για τους ίδιους λόγους που αναλύσαμε πριν.

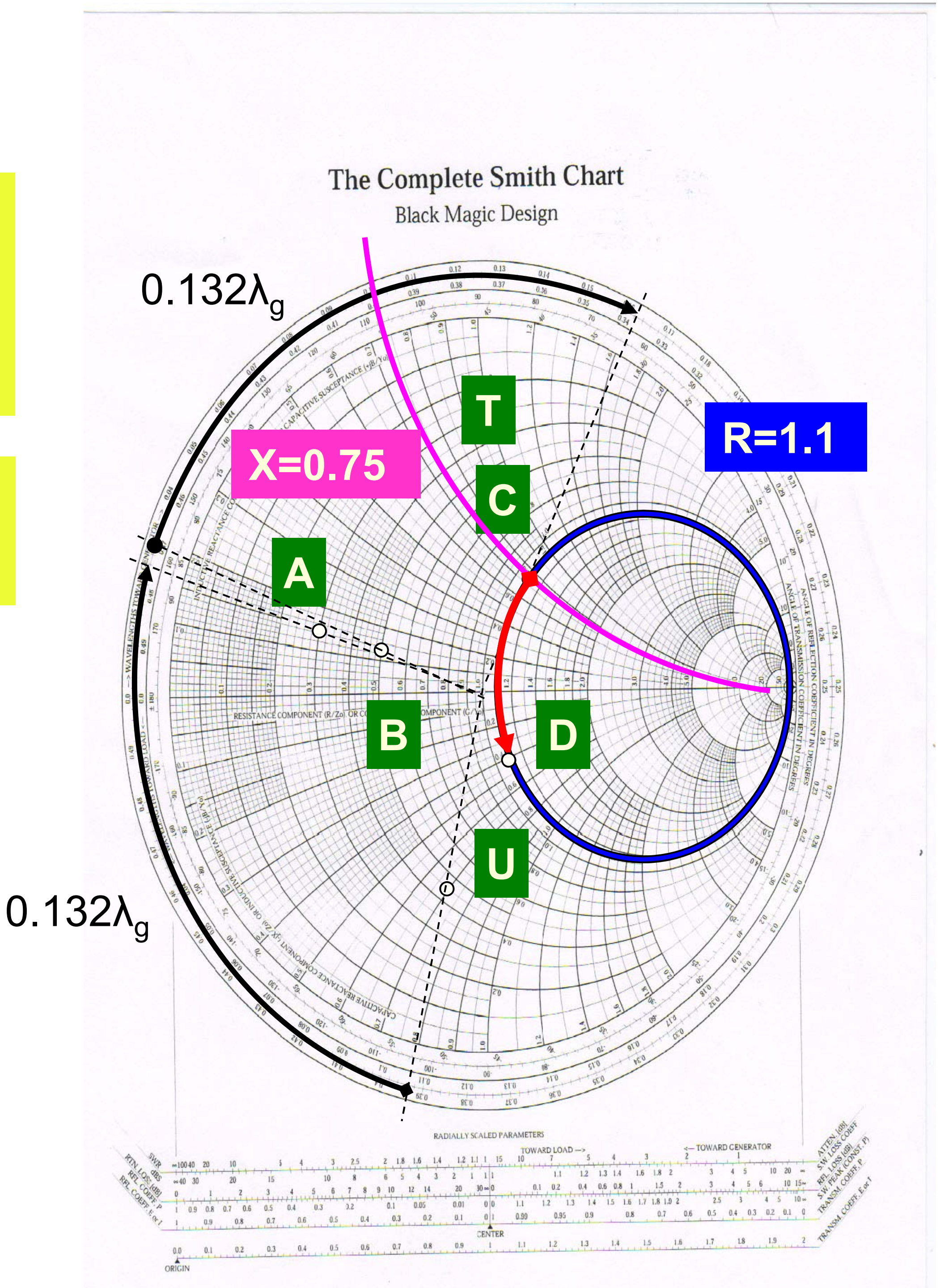
13. Φυσικά το νέο σημείο του κύκλου (O, OB) που προκύπτει είναι το σημείο C, το οποίο αντιστοιχεί σε R=1.1 και X=+0.75.



Βήματα επίλυσης

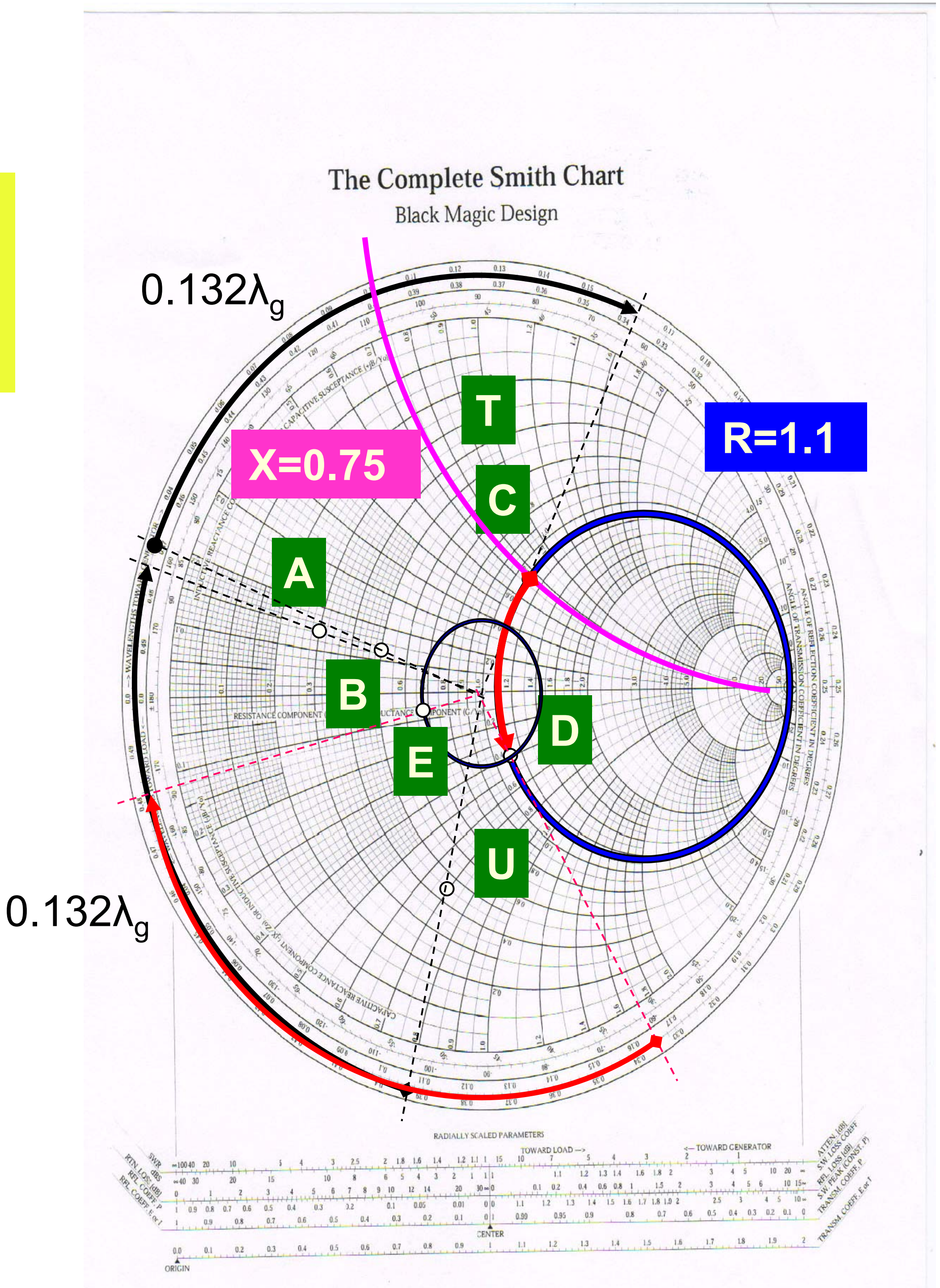
13. Στη συνέχεια, η πρόσθεση της αγωγιμότητας ζ_1 ισοδυναμεί με τη μετακίνηση πάνω στον κύκλο R=1.1 έως το σημείο που τέμνει τον X=-0.4. Γιατί;

14. Έτσι βρίσκουμε το σημείο D, το οποίο αντιστοιχεί σε ανηγμένη αγωγιμότητα 1.1-i 0.4.



Βήματα επίλυσης

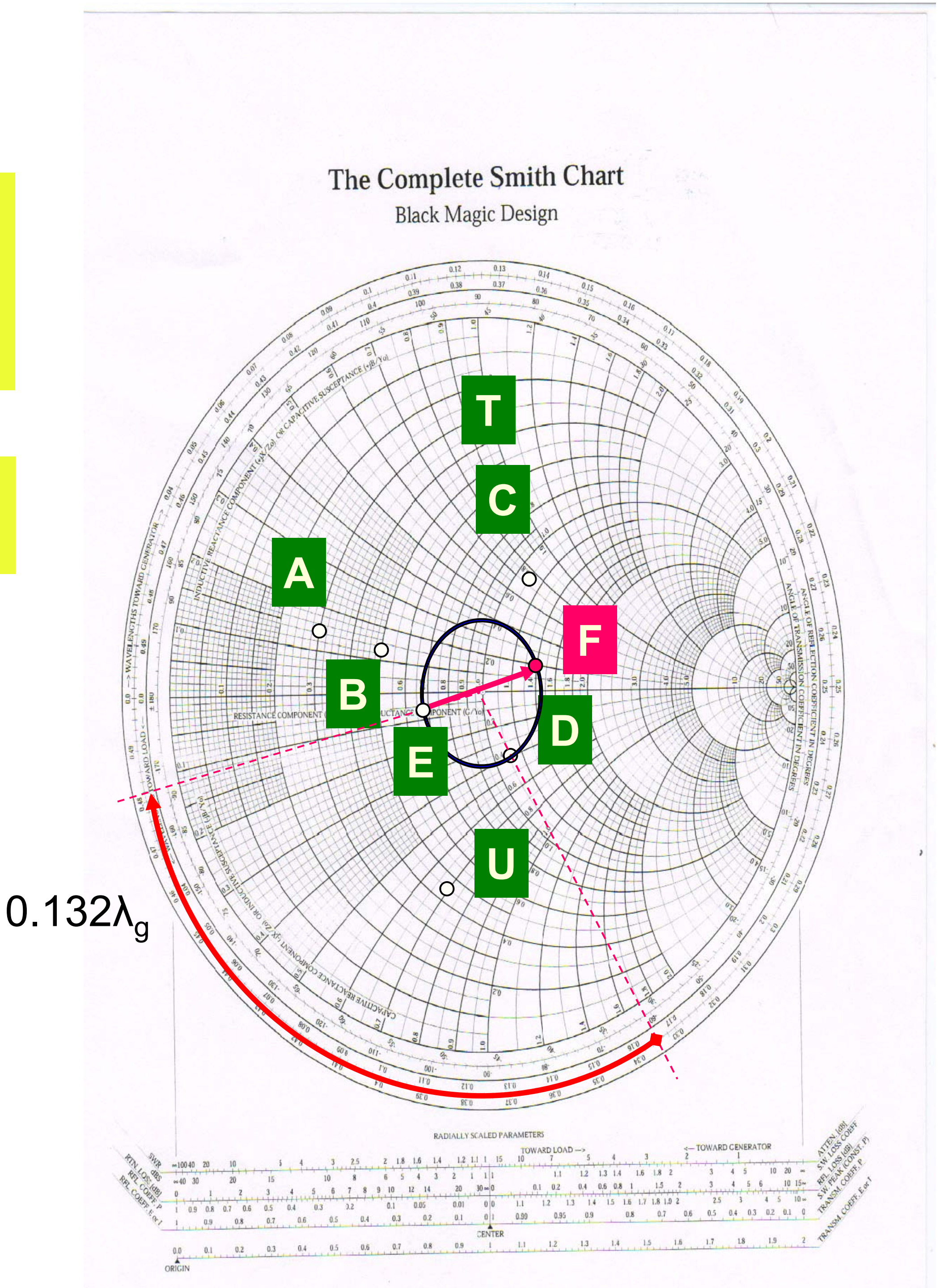
16. Απομένει να υπολογιστεί η ανηγμένη αγωγιμότητα σε μήκος $l=0.132\lambda_g$ από το φορτίο Z_1 καθώς κινούμαστε προς την πηγή.



Βήματα επίλυσης

17. Απομένει να υπολογιστεί το σημείο F, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του E, για να πάρουμε τιμές για την ανηγμένη αντίσταση που ενδιαφέρει.

18. Η ανηγμένη αντίσταση στο σημείο F, είναι: $\zeta_F = 1.4 + i\,0.2$

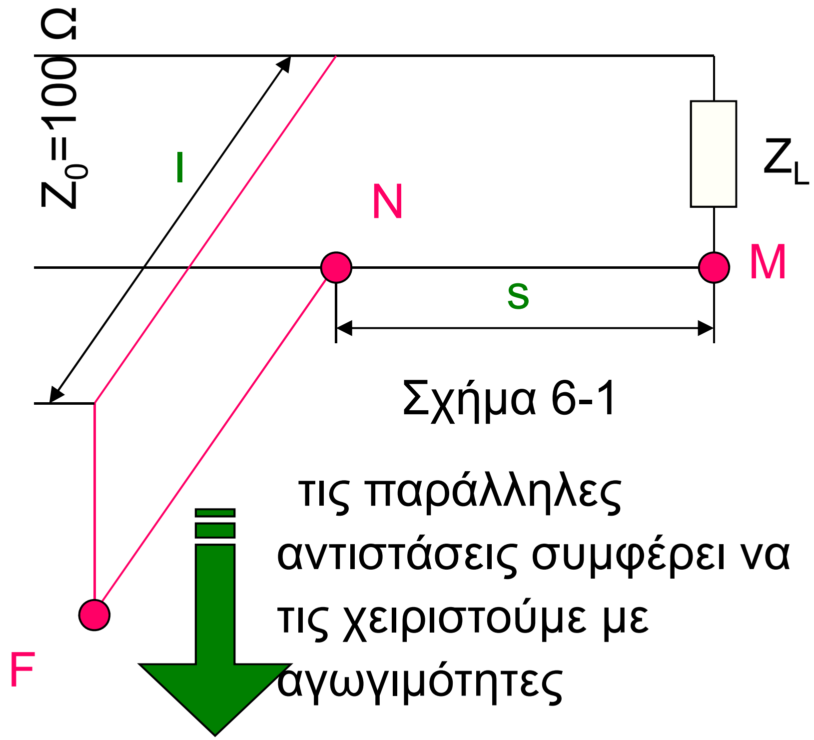


ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (21)

Άσκηση 6. Σε γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες με χαρακτηριστική αντίσταση 100 Ω και φορτίο 25 – i75 Ω. Αν το μήκος κύματος στη γραμμή είναι 30cm, να βρεθεί σε ποια θέση πρέπει να τοποθετηθεί παράλληλα μια βραχυκυκλωμένη γραμμή μεταφοράς καθώς και το μήκος αυτής, ώστε να έχουμε προσαρμογή.

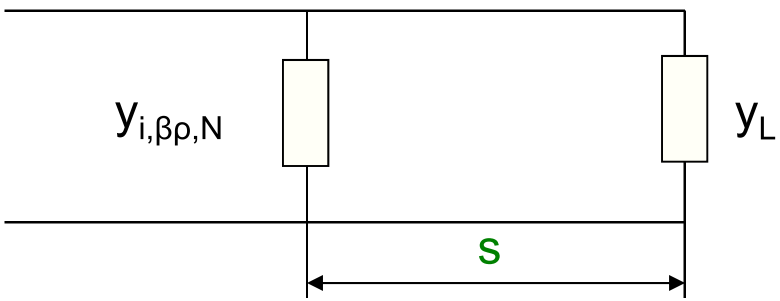
Λύση

Βήματα επίλυσης



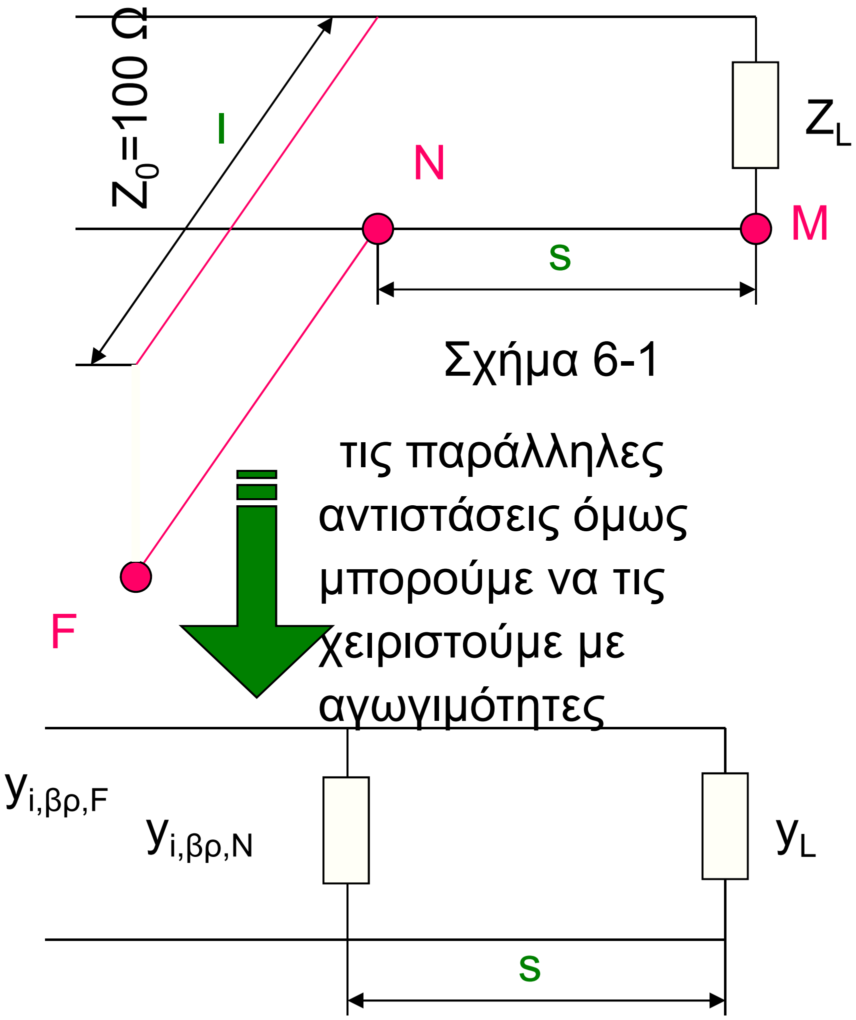
Σχήμα 6-1

τις παράλληλες αντιστάσεις συμφέρει να τις χειριστούμε με αγωγιμότητες



Σχήμα 6-2

1. Η ανηγμένη αντίσταση της γραμμής μεταφοράς με χαρακτηριστική αντίσταση Z_0=100 Ω πρέπει να είναι $ζ_0$=1 στην είσοδο.
2. Όμως, η ανηγμένη αντίσταση αυτή είναι ο παράλληλος συνδυασμός της ανηγμένης αντίστασης εισόδου της βραχυκυκλωμένης γραμμής μεταφοράς και της αντίστασης εισόδου της γραμμής μεταφοράς με φορτίο Z_L.
3. Η προσαρμογή γίνεται στο σημείο (στη θέση) N.
4. Η βραχυκυκλωμένη γραμμή μεταφοράς έχει μήκος l και βρίσκεται σε απόσταση s από το φορτίο.

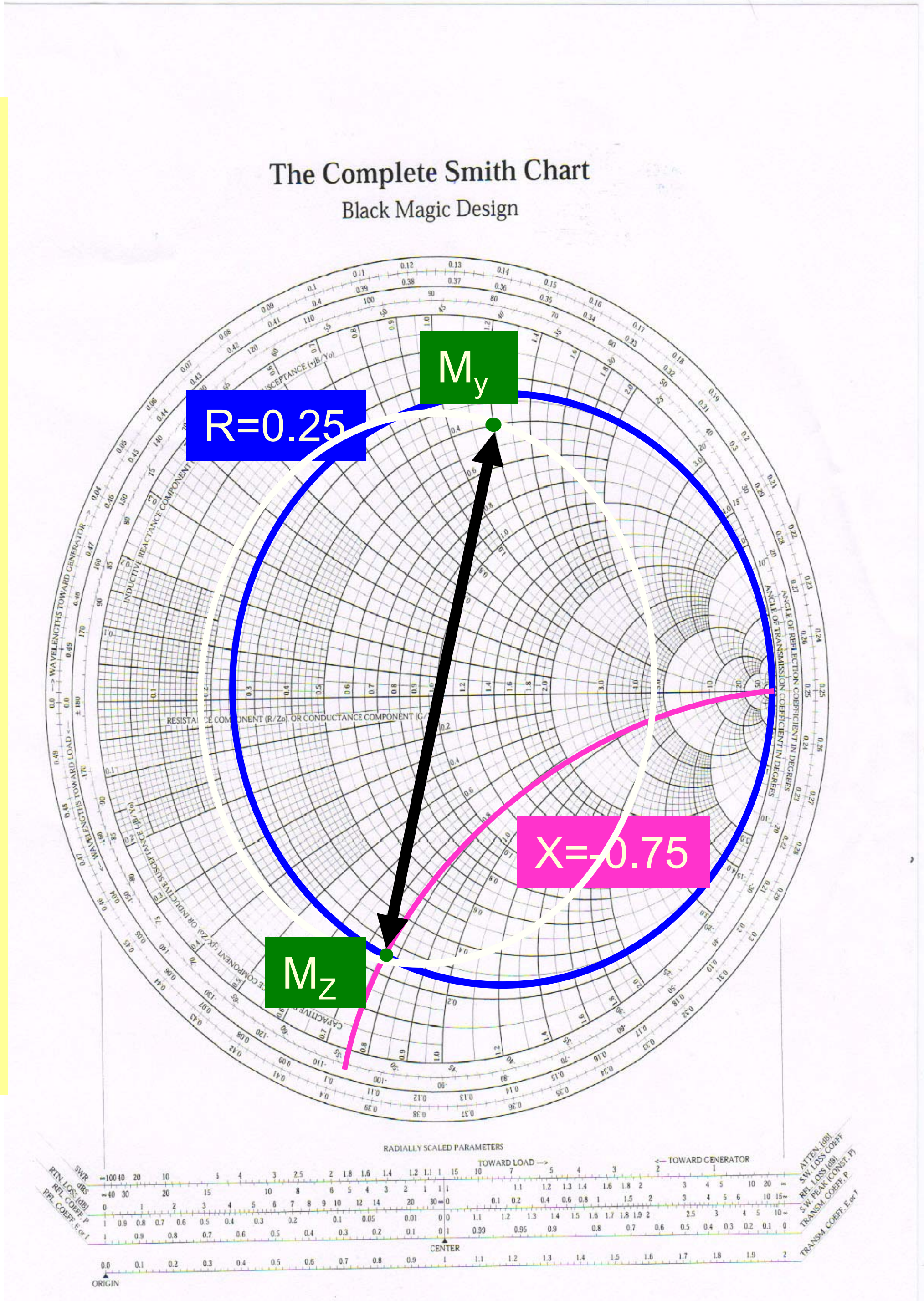


Σχήμα 6-1

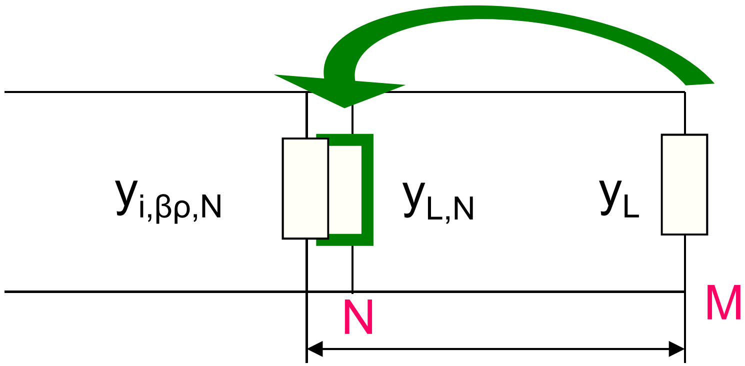
Σχήμα 6-2

5. Η ολική ανηγμένη αγωγιμότητα του Σχήματος 6-2 είναι ίση με το άθροισμα της τιμής $y_{i,βρ,N}$ και $y_{L,N}$
6. Γνωρίζουμε ότι η βραχυκυλωμένη γραμμή μεταφοράς στη θέση (σημείο) F έχει αντίσταση 0 Ω, δηλαδή ανηγμένη αντίσταση 0 + *i*0.
7. Στη συνέχεια, η y_L πρέπει να υπολογιστεί στη θέση N. Για την προσαρμογή πρέπει να ισχύει: $y_{i,βρ,N} + y_{L,N} = 1$.
8. Τότε $R_{L,N} + i\, X_{L,N} + i\, _{Xβρ,N} = 1$. Επομένως, $R_{L,N} = 1$ και $X_{L,N} = - X_{βρ,N}$, πράγμα που δηλώνει «συζυγή προσαρμογή».

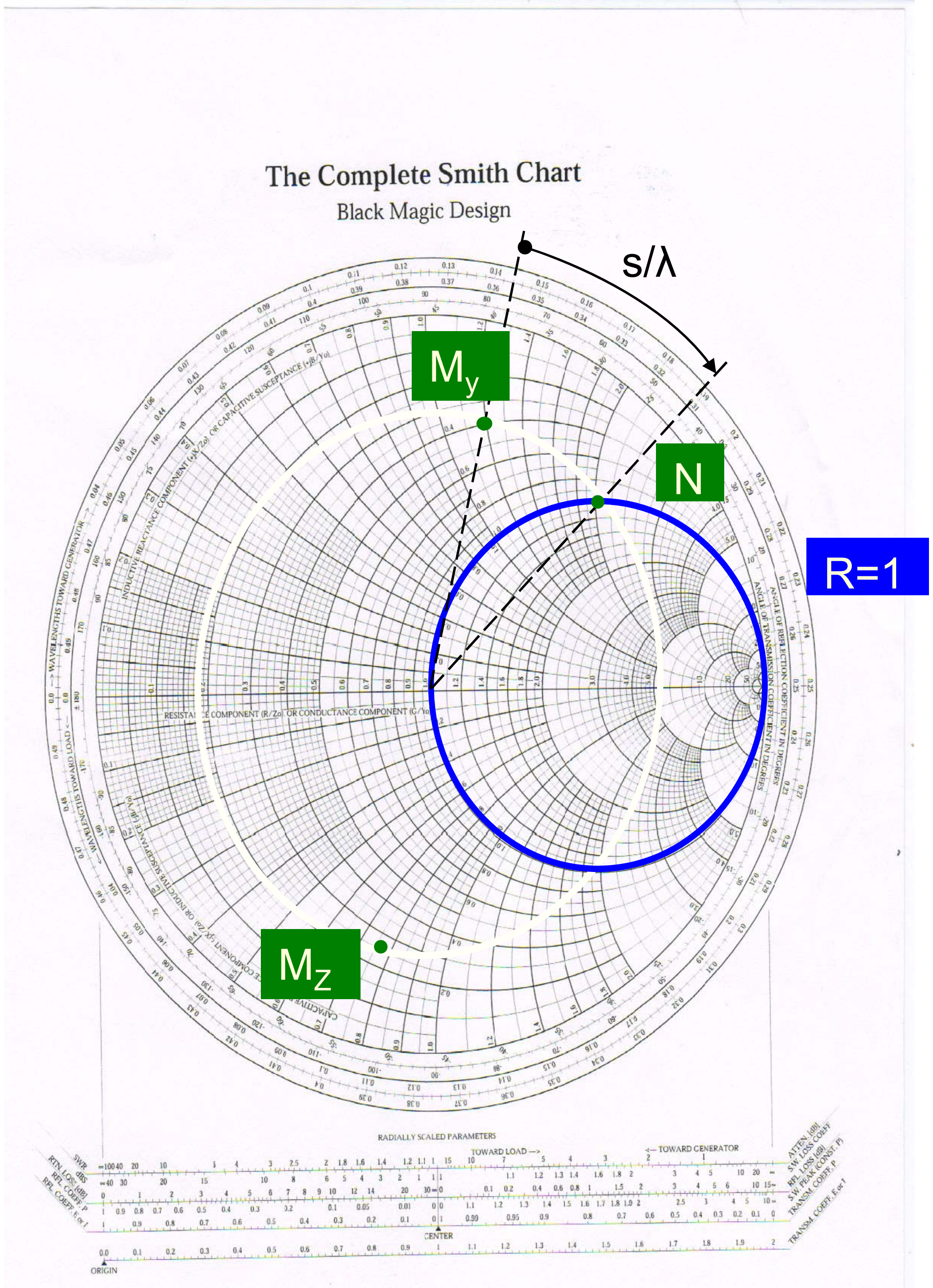
9. Η γραμμή μεταφοράς έχει με φορτίο Z_L=25-i75 Ω, δηλαδή έχει ανηγμένη αντίσταση $\zeta_{L,M}$=0.25 - i0.75 στη θέση Μ, η οποία αντιστοιχεί στο σημείο M_Z πάνω στο χάρτη Smith.
10. Κατά τα γνωστά το σημείο αυτό είναι η τομή των κύκλων R=0.25 και X=-0.75.
11. Συνεπώς, θα πάρουμε το αντιδιαμετρικό του M_y πάνω στον κύκλο της γραμμής μεταφοράς για να βρούμε την ανηγμένη αγωγιμότητα στη θέση Μ.



12. Εφόσον το σημείο M_y αντιστοιχεί στην αγωγιμότητα του φορτίου Z_L στο σημείο M, πρέπει αυτή να την βρούμε στη θέση N (είσοδο της γραμμής).



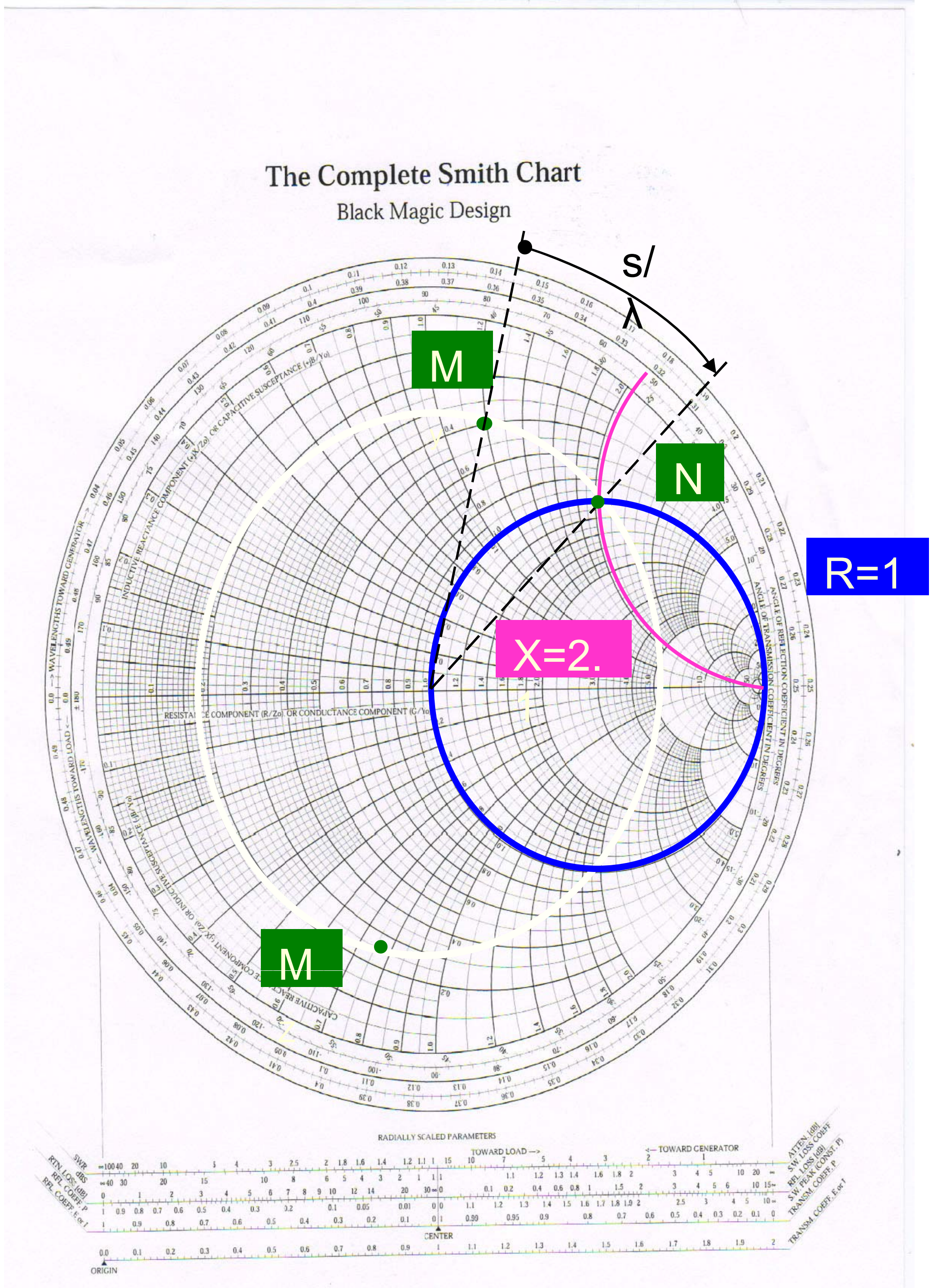
13. Άρα, πρέπει να κινηθούμε κατά τόξο μήκους s/λ προς την πηγή. Επειδή το πραγματικό μέρος της ανηγμένης αγωγιμότητας πρέπει είναι 1, η λύση θα είναι το σημείο τομής της γραμμής μεταφοράς με τον κύκλο R=1 → σημείο N.



14. Από το χάρτη Smith βρίσκουμε ότι s/λ=0.046.

15. Κατά τα γνωστά το σημείο N είναι η τομή του κύκλου με αγωγιμότητα R=1 και φανταστική αγωγιμότητα X=2.1

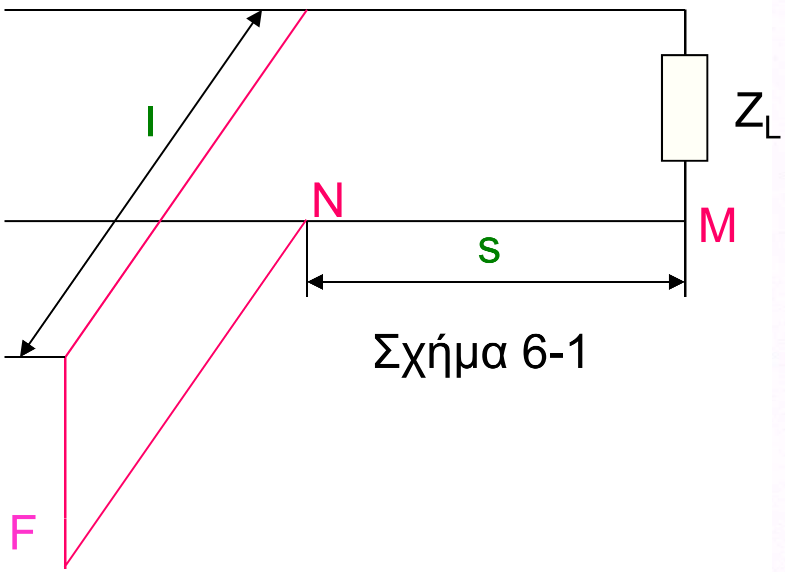
16. Στην πραγματικότητα, η ολική φανταστική ανηγμένη αγωγιμότητα πρέπει να είναι 0. Το ρόλο της αντιστάθμισης παίζει η βραχυκυκλωμένη γραμμή μεταφοράς. Αυτή είναι η φυσική σημασία της συζυγούς προσαρμογής, όπου είχαμε βρει ότι πρέπει R=1 και $X_{L,N} = - X_{\beta\rho,N}$



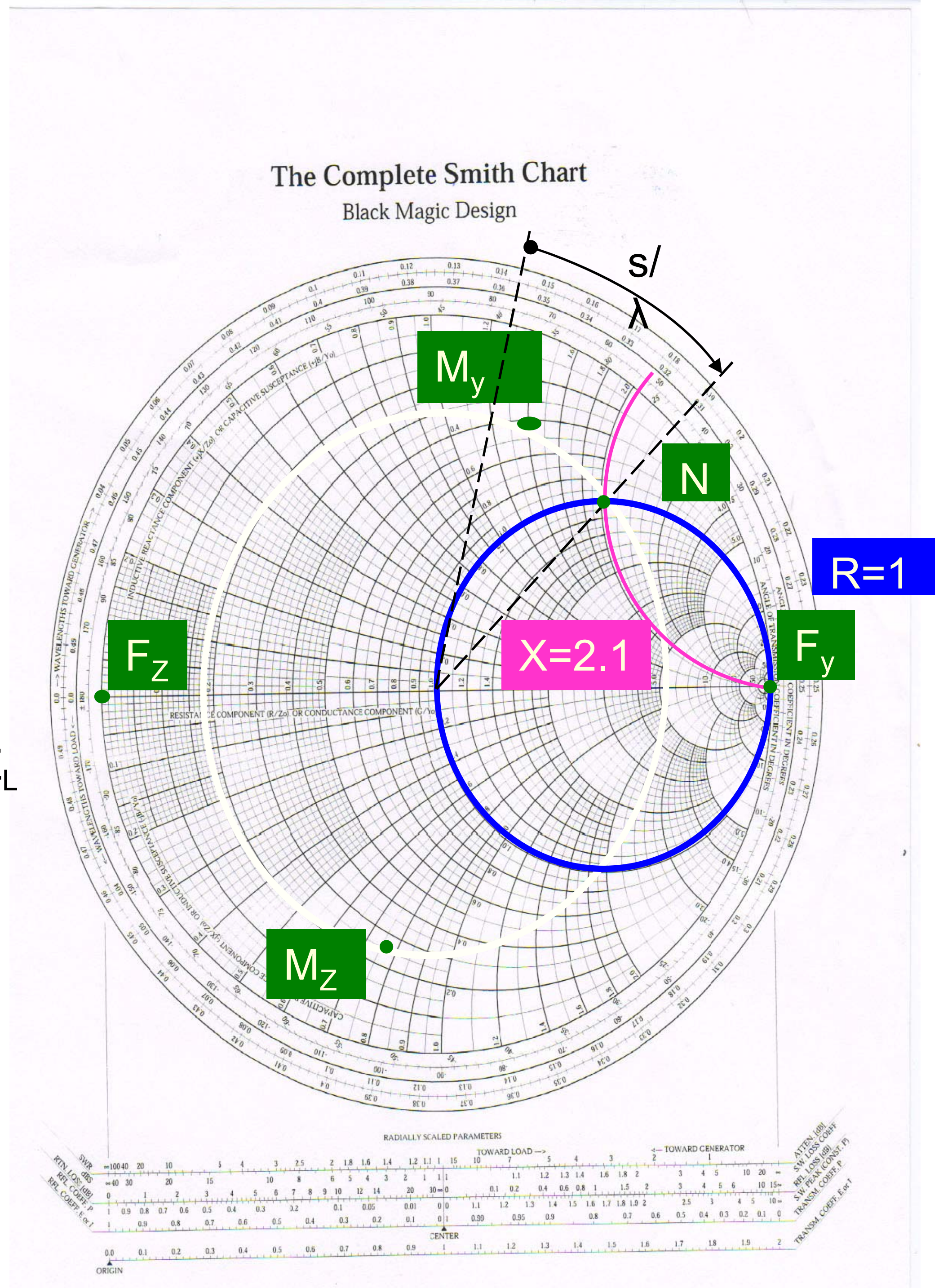
17. Το βραχυχύκλωμα ως ανηγμένη αντίσταση είναι το σημείο F_Z.

18. Το βραχυχύκλωμα ως ανηγμένη αγωγιμότητα είναι το σημείο F_y.

Θυμίζουμε

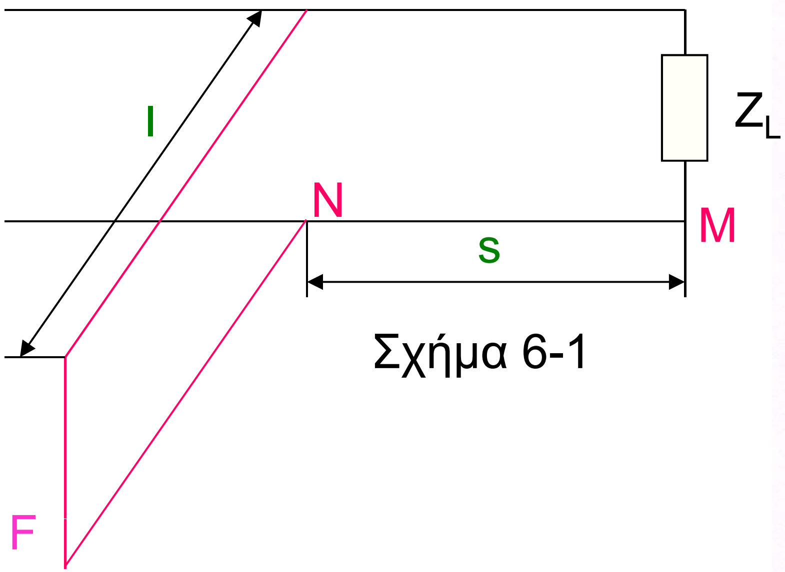


Σχήμα 6-1

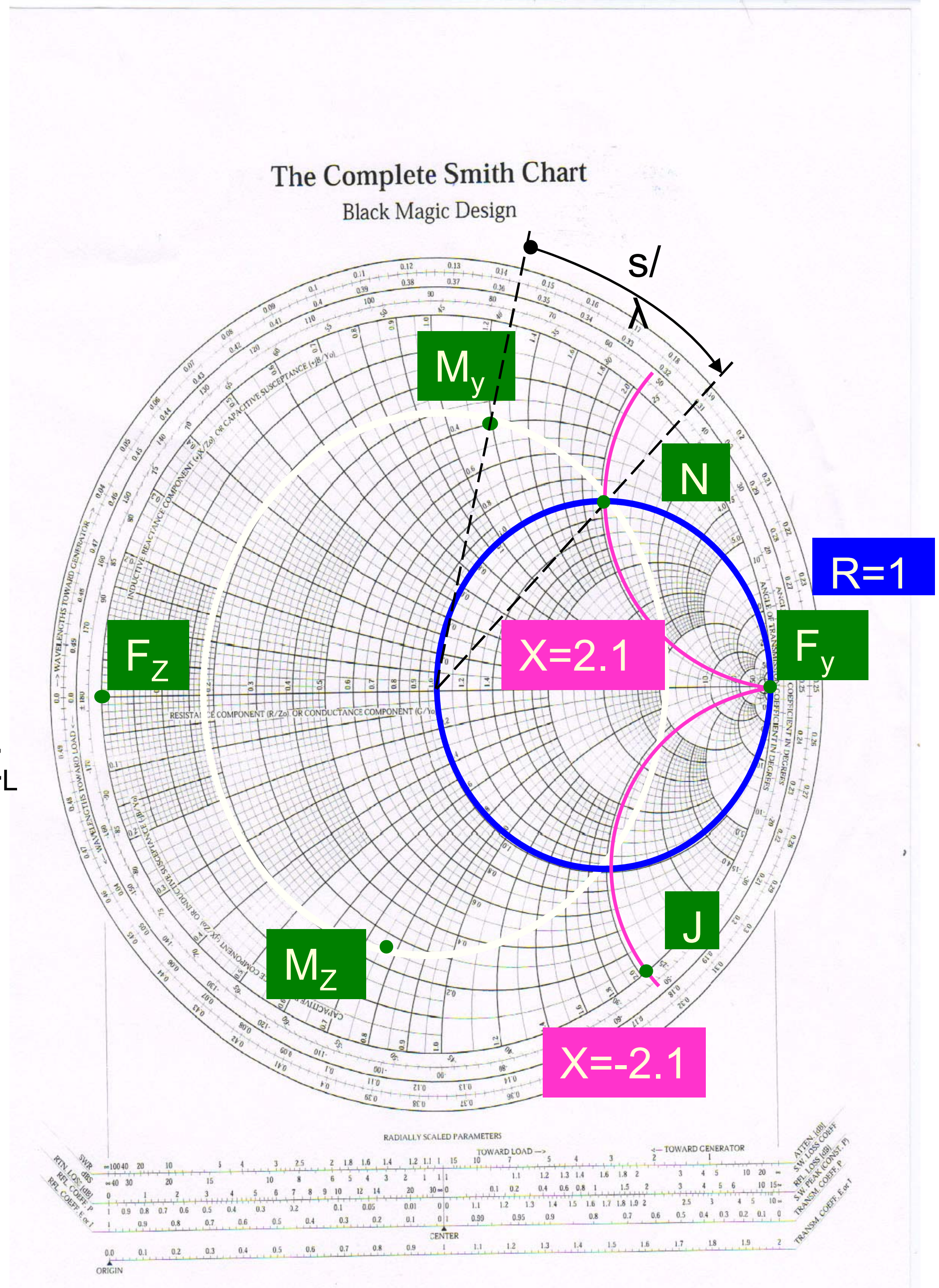


19. Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι $X_{\beta\rho,N}$=-2.1. Το ζητούμενο μήκος l αντιστοιχεί στο τόξο F_yJ, όπου το σημείο J αντιστοιχεί σε $X_{\beta\rho,N}$=-2.1. Από το τόξο αυτό βρίσκουμε ότι l/λ=0.07.

Θυμίζουμε



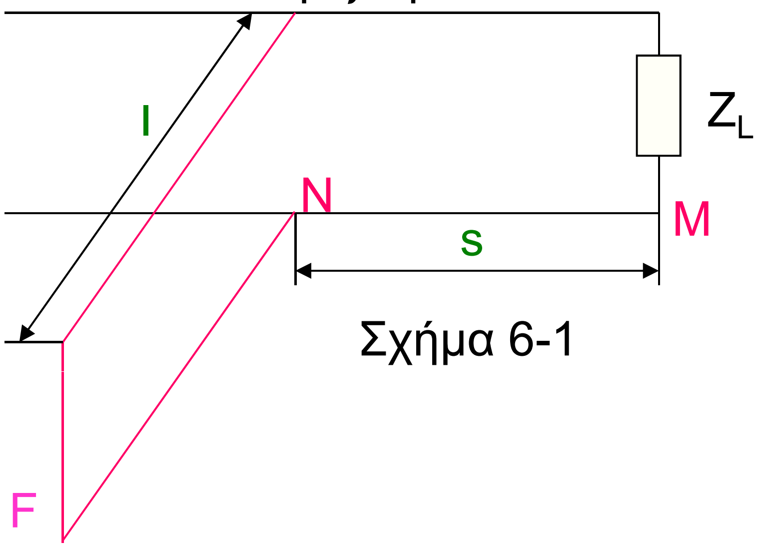
Σχήμα 6-1



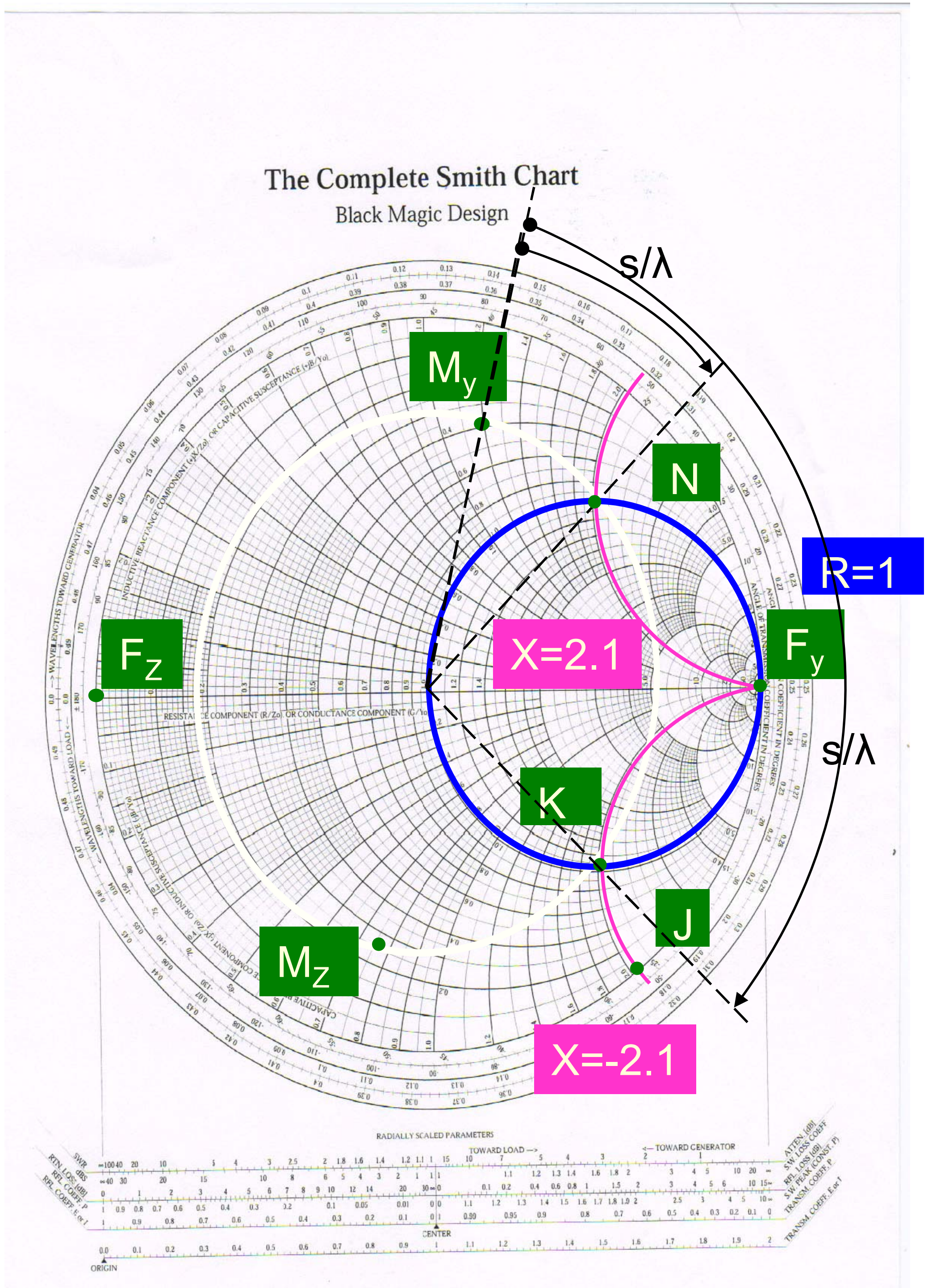
20. Η τομή του κύκλου της γραμμής μεταφοράς με τον κύκλο R=1 είναι μόνο το σημείο N;

21. Αν αντί του τόξου M_yN παίρναμε το τόξο M_yK, τότε θα είχαμε μεγαλύτερο s. Πώς θα μεταβάλλονταν τότε το μήκος l; Ποιά είναι η βέλτιστη περίπτωση; (Αφήνεται ως άσκηση)

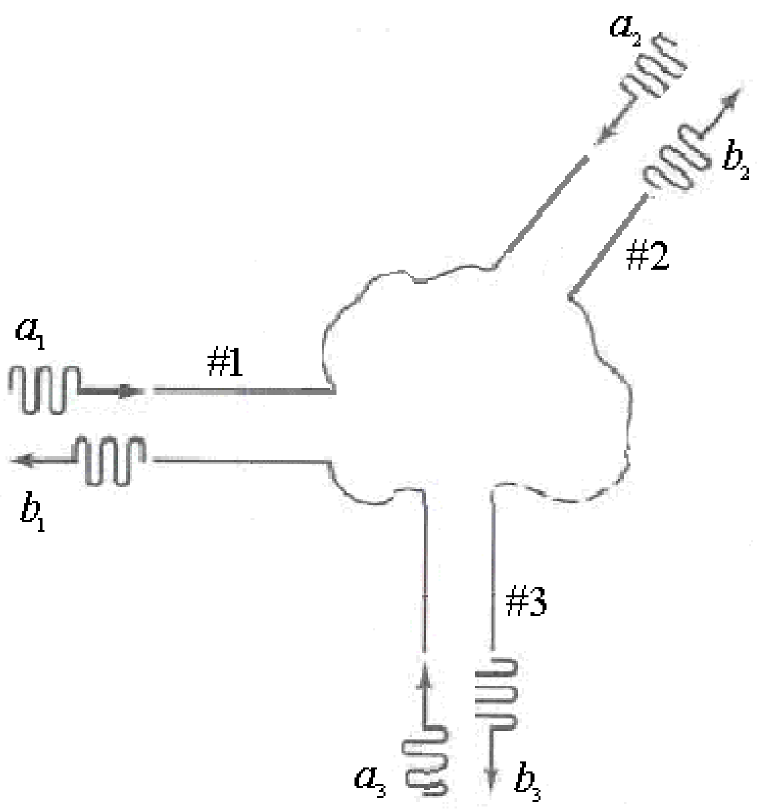
Θυμίζουμε



Σχήμα 6-1



ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (1)



Κανονικοποιημένες κυματικές τάσεις

•εισόδου a_i

•εξόδου b_i

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3$$
$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3$$
$$b_3 = S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3$$

Συντελεστής ανάκλασης στη θύρα #1

$$\rho_1 \equiv \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + S_{12}\frac{a_2}{a_1} + S_{13}\frac{a_3}{a_1}$$

$$\rho_1 = S_{11}\Big|_{\alpha_2=0,\,\alpha_3=0}$$

Συντελεστής μεταφοράς από τη θύρα l στη θύρα k

$$S_{kl} = \frac{b_k}{a_l}\Bigg|_{a_i=0\,\forall\, i\neq l}$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (2)

Ιδιότητες πολύθυρων

- **Χωρίς απώλειες**

$$\sum_{i=1}^{N} P_{in,i} = \sum_{i=1}^{N} P_{out,i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \left|a_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|b_i\right|^2 \Rightarrow S \cdot S^{*^T} = I$$

- **Αμφίδρομα**

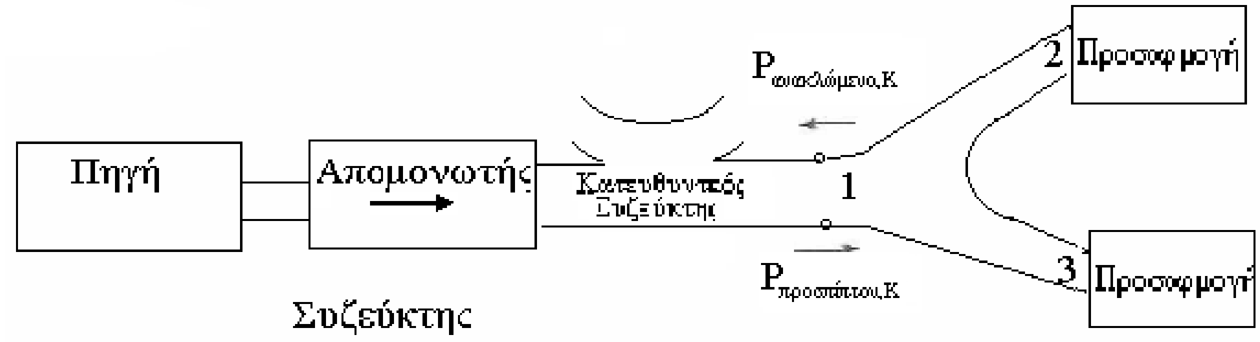
$$S_{ij} = S_{ji},\ \forall i \neq j$$

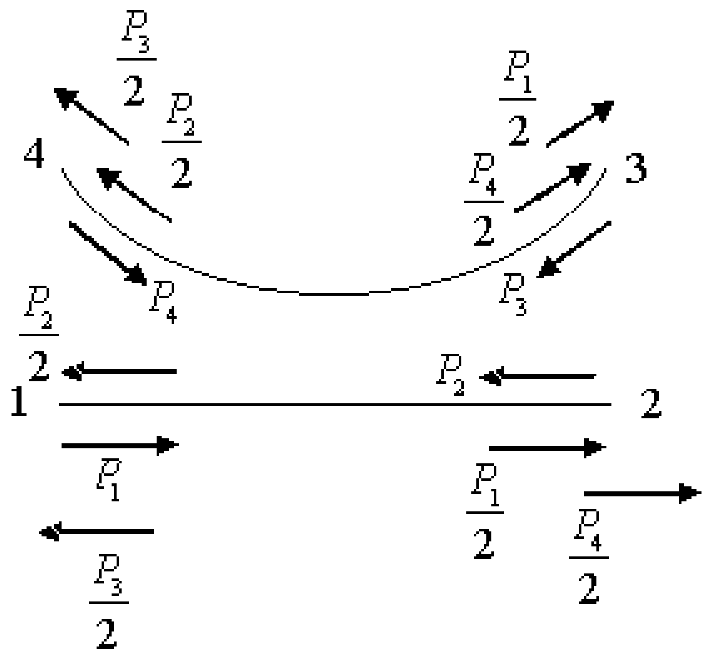
- **Προσαρμοσμένα σε όλες τις θύρες τους**

$$S_{ii} = 0,\ \forall i$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (3)

Μέτρηση παραμέτρου ανάκλασης S_{ii}





Θύρα #4 προσαρμοσμένη ($P_4 = 0$)

$$\Rightarrow Q_3 = \frac{P_1}{2} = P_{\pi\rho,K}$$

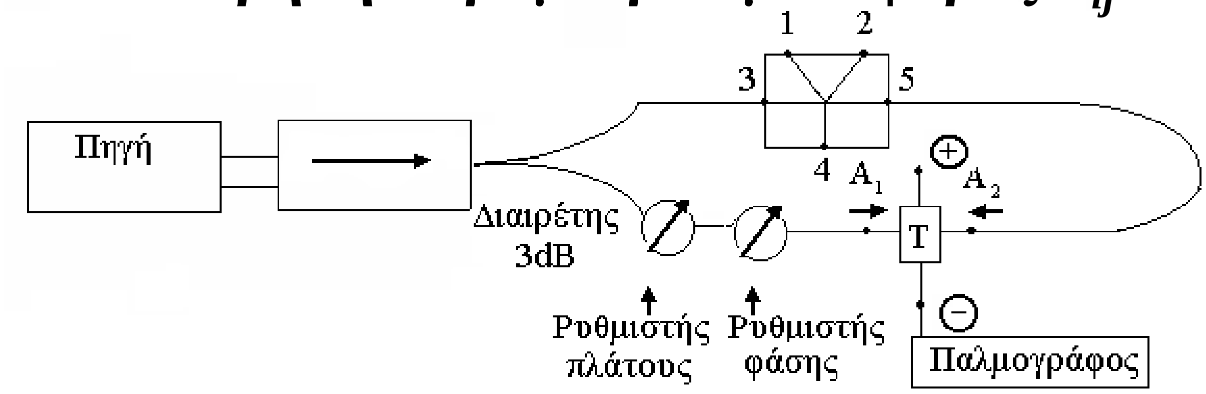
Θύρα #3 προσαρμοσμένη ($P_3 = 0$)

$$\Rightarrow Q_4 = \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{2}P_{\alpha\nu,K}$$

$$S_{11} = \frac{P_{\alpha\nu,K}}{P_{\pi\rho,K}}$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (4)

Μέτρηση παραμέτρου μεταφοράς S_{ij}



- **Χωρίς το πολύθυρο**

Ρυθμίζουμε πλάτος και φάση ώστε $A_1 = A_2$ (η έξοδος του παλμογράφου είναι μηδενική). Ενδείξεις ρυθμιστών: $R_1\left(dB\right), \varphi_1$

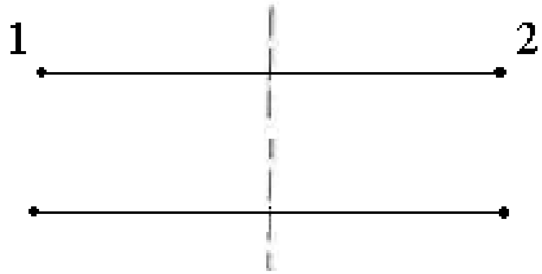
- **Με το πολύθυρο**

Το πολύθυρο θα προκαλέσει αλλαγή πλάτους και φάσης (η έξοδος του παλμογράφου θα είναι μη μηδενική). Με αλλαγή των ρυθμιστών σε $R_2\left(dB\right), \varphi_2$ (η έξοδος του παλμογράφου θα γίνει πάλι μηδενική).

$R_1 - R_2 = \left|S_{53}\right|, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_{53}$ οι υπόλοιπες 3 θύρες είναι προσαρμοσμένες.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (5)

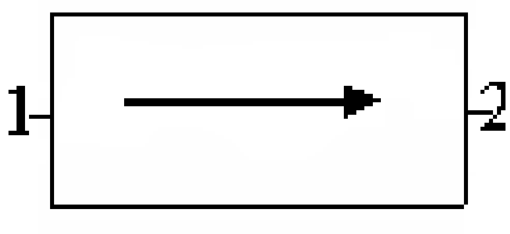
I) **Για απλό κυματοδηγό**



$$S = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

Με κατάλληλη ρύθμιση του μήκους της γραμμής εισόδου : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

II) **Για απομονωτή**



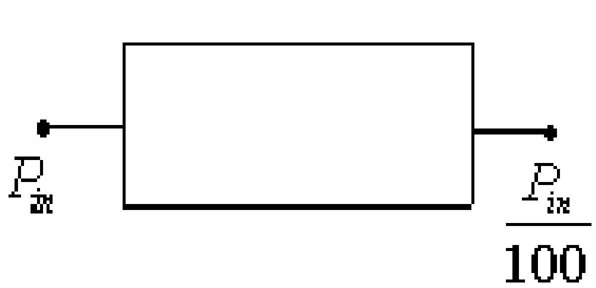
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (6)

III) **Για εξασθενητή 3 dB**

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

IV) **Για εξασθενητή 20 dB**



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

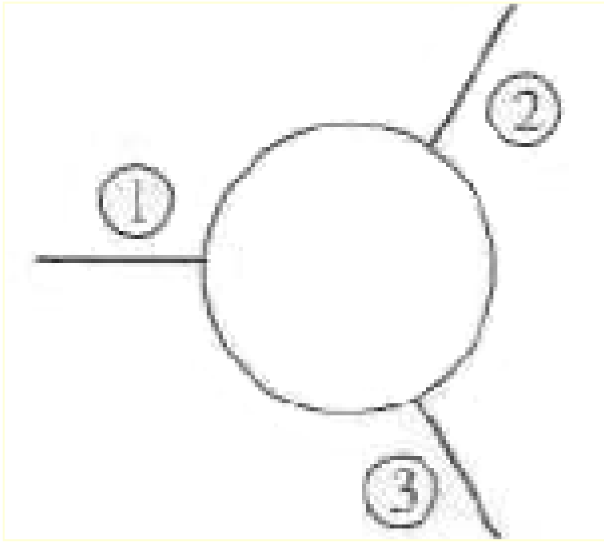
ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (7)

Άσκηση 7. Μικροκυματικό τρίθυρο χωρίς απώλειες είναι προσαρμοσμένο σε όλες τις θύρες του, μη αμφίδρομο και με $S_{21}\neq 0$. Να βρεθεί η μήτρα σκέδασης του τριθύρου.

Λύση

$$S=\begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{*^T}=\begin{pmatrix} 0 & S_{21}^* & S_{31}^* \\ S_{12}^* & 0 & S_{32}^* \\ S_{13}^* & S_{23}^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$S\cdot S^{*^T}=I\Rightarrow \begin{cases} |S_{12}|^2+|S_{13}|^2=1 & (\mathrm{a}) \\ S_{13}S_{23}^*=0=S_{13}^*S_{23} & (\mathrm{b}) \\ S_{12}S_{32}^*=0=S_{32}S_{12}^* & (\mathrm{c}) \\ |S_{21}|^2+|S_{23}|^2=1 & (\mathrm{d}) \\ S_{21}S_{31}^*=0=S_{31}S_{21}^* & (\mathrm{e}) \\ |S_{31}|^2+|S_{32}|^2=1 & (\mathrm{f}) \end{cases}$$



ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (8)

$$S_{21} \neq 0,(e) \Rightarrow S_{31} = 0 \qquad (1)$$

$$(f),(1) \Rightarrow |S_{32}| = 1 \Rightarrow S_{32} = e^{i\varphi_{32}} \qquad (2)$$

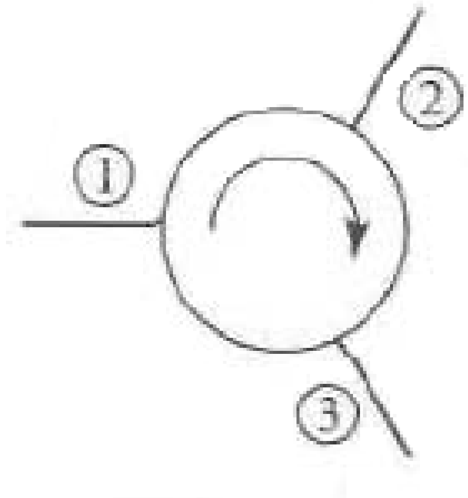
$$(c),(2) \Rightarrow S_{12} = 0 \qquad (3)$$

$$(a),(3) \Rightarrow |S_{13}| = 1 \Rightarrow S_{13} = e^{i\varphi_{13}} \qquad (4)$$

$$(b),(4) \Rightarrow S_{23} = 0 \qquad (5)$$

$$(d),(5) \Rightarrow |S_{21}| = 1 \Rightarrow S_{21} = e^{i\varphi_{21}} \qquad (6)$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i\varphi_{13}} \\ e^{i\varphi_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_{32}} & 0 \end{pmatrix}$$



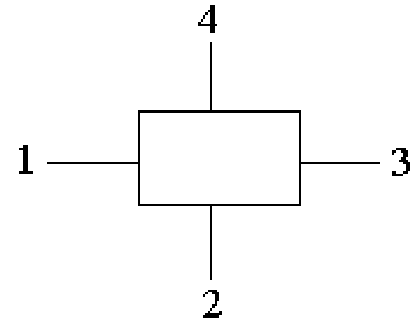
"Δεξιόστροφος κυκλοφορητής"

Για "αριστερόστροφο κυκλοφορητή" θα έπρεπε $S_{12} \neq 0$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (9)

Άσκηση 8. Μικροκυματικό τετράθυρο αμφίδρομο και χωρίς απώλειες είναι προσαρμοσμένο σε όλες τις θύρες του, οι θύρες του 1 και 4 είναι ασύζευκτες, S_{12}=k$\in\Re$ και S_{13}=S_{24}. Να υπολογιστεί η μήτρα σκέδασης του τετράθύρου και να βρεθεί η ισχύς που βγαίνει από κάθε θύρα του, αν η ισχύς εισόδου στη θύρα 1 είναι 1 mW.

Λύση



$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{13} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{13} & S_{34} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = S_{12} a_1 \Rightarrow \left|b_2\right|^2 = \left|S_{12}\right|^2 \left|a_1\right|^2 = k^2 \; mW$$

$$b_3 = S_{13} a_1 \Rightarrow \left|b_3\right|^2 = \left|S_{13}\right|^2 \left|a_1\right|^2 = \left(1 - k^2\right) mW$$

$$b_4 = 0$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (10)

$$S \cdot S^{*^T} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{13} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{13} & S_{34} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{13} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{13} & S_{34} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \left|S_{12}\right|^2 + \left|S_{13}\right|^2 = 1 \Rightarrow \left|S_{13}\right| = \sqrt{1-k^2}$$

$$S_{13}S_{23}^* = 0 \Rightarrow S_{23} = 0$$

$$S_{12}S_{13}^* + S_{13}S_{34}^* = 0$$

$$\left|S_{12}\right|^2 + \left|S_{23}\right|^2 + \left|S_{13}\right|^2 = 1$$

$$S_{23}S_{34}^* = 0$$

$$\left|S_{13}\right|^2 + \left|S_{23}\right|^2 + \left|S_{34}\right|^2 = 1$$

$$\left|S_{13}\right|^2 + \left|S_{34}\right|^2 = 1 \Rightarrow \left|S_{34}\right| = k$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΣΚΕΔΑΣΗΣ (11)

$$\begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{13} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{13} & S_{34} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & \sqrt{1-k^2}e^{i\varphi_{13}} & 0 \\ k & 0 & 0 & \sqrt{1-k^2}e^{i\varphi_{13}} \\ \sqrt{1-k^2}e^{i\varphi_{13}} & 0 & 0 & ke^{i\varphi_{34}} \\ 0 & \sqrt{1-k^2}e^{i\varphi_{13}} & ke^{i\varphi_{34}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k\sqrt{1-k^2}e^{-i\varphi_{13}} + \sqrt{1-k^2}e^{i\varphi_{13}}ke^{-i\varphi_{34}} = 0$$

$$e^{-i\varphi_{13}} = e^{-i\varphi_{13}} = -e^{i(\varphi_{13}-\varphi_{34})} = e^{i(\pi+\varphi_{13}-\varphi_{34})}$$

$$-\varphi_{13} = \pi + \varphi_{13} - \varphi_{34}$$

$$2\varphi_{13} - \varphi_{34} + \pi = 0$$

$$\varphi_{34} = 0 \Rightarrow \varphi_{13} = -\frac{\pi}{2}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ε. Λεκατσά, *Εισαγωγή στη Θεωρία των Μικροκυματικών Στοιχείων*, Εκδόσεις Σελλούντος, 1979.
- C. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, J. Wiley, 1989.
- Ι. Σάχαλου, *Μικροκύματα.*, Εκδόσεις Αϊβαζή-Ζουμπούλη, 1990.
- F. Benson and T. Benson, *Fields, Waves and Transmission Lines*, Chapman & Hall, 1991.
- R. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, IEEE Press, 1991.
- R. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd Edition, McGraw-Hill, 1992.
- S. Ramo et al., *Fields & Waves in Communication Electronics*, J. Wiley, 1992.
- Ν. Ουζούνογλου, *Εισαγωγή στα Μικροκύματα*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου 1994.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (συνέχεια)

- L. C. Chen και J. A. Kong, *Εφαρμοσμένος Ηλεκτρομαγνητισμός*, Μετάφραση Κ. Λιολιούση, Εκδόσεις Ίων, 1995.
- Σ. Λιβιεράτος και Χ. Βαζούρας, *Εργαστήριο Μικροκυμάτων – Κεραιών*, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, 1997.
- D. Pozar, *Μικροκυματική Τεχνολογία*, Μετάφραση Κ. Λιολιούση, Εκδόσεις Ίων, 1998.
- Κ. Λιολιούση, *Μικροκύματα Ι*, Εκδόσεις Ίων 2000.